**прочитать, законспектировать.**

**Определение булевой функции**

**Булевой функцией** y=f(x1, x2 ... xn) от п переменных x1, x2, xn называется любая функция, в которой аргументы и функция могут принимать значение либо 0 либо 1, т.е. булева функция это правило по которому произвольному набору нулей и единиц (x1, x2 ... xn) ставится в соответствие значение 0 или 1.

Булевы функции называются также функциями алгебры логики, двоичными функциями и переключательными функциями.

Булеву функцию от **n** переменных можно задать [таблицей истинности](http://tablica-istinnosti.ru/), в которой наборы значений аргументов расположены в порядке возрастания их номеров: сначала идет набор, представляющий собой двоичное разложение 0 (этот набор имеет номер 0); затем идет набор, являющийся двоичным разложением 1, потом 2, 3 и т.д. Последний набор состоит из **n** единиц и является двоичным разложением числа 2n -1 (такой порядок расположения наборов назовем лексикографическим порядком). Учитывая, что отсчет начинается с 0, а значение булевой функции может быть либо 0 либо 1, заключаем, что существует всего 22n различных булевых функций от **n** переменных. Таким образом, имеется, например, 16 булевых функций от двух переменных, 256 — от трех и т. д.

**Пример** (голосование): Рассмотрим устройство, фиксирующее принятие некоторой резолюции "комитетом трех". Каждый член комитета при одобрении резолюции нажимает свою кнопку. Если большинство членов голосуют «за», то резолюция принимается. Это фиксируется регистрирующим прибором. Таким образом, устройство реализует функцию f(x,y,z), таблица истинности которой имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f(x,y,z) | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Булева функция также однозначно задается перечислением всех наборов, на которых она принимает значение 0, либо перечислением всех наборов, на которых она принимает значение 1.Полученную в примере функцию f можно также задать следующей системой равенств: f(0,0,0) = f(0,0,1) = f(0,1,0) = f(1,0,0) = 0.

Вектором значений булевой функции y=f(x1, x2 ... xn) называется упорядоченный набор всех значений функции f, при котором значения упорядочены по лексикографическому порядку. Например, пусть функция трех переменных f задана вектором значений (0000 0010) и необходимо найти набор, на котором f принимает значение 1. Т.к. 1 стоит на 7 месте, а нумерация в лексикографическом порядке начинается с 0, то необходимо найти двоичное разложение 6. Таким образом, функция f принимает значение 1 на наборе (110).

**Элементарные булевы функции**

Среди булевых функций особо выделяются так называемые **элементарные булевы функции**, посредством которых можно описать любую булеву функцию от любого числа переменных.

1. Булева функция f(x1, x2 ... xn) принимающая значение 1 на всех наборах нулей и единиц называется константой 1, или тождественной единицей. Обозначение: **1**.

2. Булева функция f(x1, x2 ... xn) принимающая значение 0 на всех наборах нулей и единиц называется константой 0, или тождественным нулем. Обозначение: **0**.

3. Отрицанием называется булева функция одной переменной, которая определяется следующей [таблицей истинности](http://tablica-istinnosti.ru/):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 |
| f(x) | 1 | 0 |

Обозначения: ¬x. Запись ¬x читается «не икс» или «отрицание икс».

4. Конъюнкцией называется булева функция двух переменных, которая определяется следующей таблицей истинности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0 | 1 | 1 |
| y | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f(x, y) | 0 | 0 | 0 | 1 |

Другие названия: логическое умножение (произведение); логическое «и».

Обозначения: x&y, x⋅y, min(x,y).

Запись x&y может читаться так: «икс и игрек» или «икс умножить на игрек».

5. Дизъюнкцией называется булева функция двух переменных, которая определяется следующей таблицей истинности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0 | 1 | 1 |
| y | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f(x, y) | 0 | 1 | 1 | 1 |

Другие названия: логическое сложение (сумма); логическое «или».

Обозначения: x∨y, max(x,y).

Запись x∨y может читаться так: «икс или игрек» или «сумма икс и игрек».

6. Импликацией называется булева функция двух переменных, которая определяется следующей таблицей истинности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0 | 1 | 1 |
| y | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f(x, y) | 1 | 1 | 0 | 1 |

Другое название: логическое следование.

Обозначения: x→y, x⇒y, x⊃y.

Запись x→y может читаться так: «из икс следует игрек».

7. Эквивалентностью называется булева функция двух переменных, которая определяется следующей таблицей истинности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0 | 1 | 1 |
| y | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f(x, y) | 1 | 0 | 0 | 1 |

Обозначения: x∼y, x↔y.

Запись x∼y может читаться так: «икс эквивалентно игрек» или «икс равносильно игрек».

8. Cуммой по модулю 2 называется булева функция двух переменных, которая определяется следующей таблицей истинности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0 | 1 | 1 |
| y | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f(x, y) | 0 | 1 | 1 | 0 |

Другое название: антиэквивалентность.

Обозначения: x⊕y, x+y.

Запись x⊕y может читаться так: «икс плюс игрек».

9. Штрих Шеффера это булева функция двух переменных, которая определяется следующей таблицей истинности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0 | 1 | 1 |
| y | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f(x, y) | 1 | 1 | 1 | 0 |

Другое название: отрицание конъюнкции, логическое «не-и».

Обозначение: x|y.

Запись x|y может читаться так: «не икс или не игрек», «икс и игрек несовместны», «икс штрих Шеффера игрек».

10. Стрелка Пирса это булева функция двух переменных, которая определяется следующей таблицей истинности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0 | 1 | 1 |
| y | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f(x, y) | 1 | 0 | 0 | 0 |

Другое название: отрицание дизъюнкции, логическое «не-или», функция Вебба.

Обозначение: x↓y; для функции Вебба - x°y.

Запись x↓y может читаться так: «ни икс и ни игрек», «икс стрелка Пирса игрек».

**Замечание:** Символы ¬, &, ∨, →, ∼, ⊕, |, ↓ участвующие в обозначениях элементарных функций будем называть связками или операциями.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| f(x,y,z) | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Булева функция также однозначно задается перечислением всех наборов, на которых она принимает значение 0, либо перечислением всех наборов, на которых она принимает значение 1.Полученную в примере функцию f можно также задать следующей системой равенств: f(0,0,0) = f(0,0,1) = f(0,1,0) = f(1,0,0) = 0.

Вектором значений булевой функции y=f(x1, x2 ... xn) называется упорядоченный набор всех значений функции f, при котором значения упорядочены по лексикографическому порядку. Например, пусть функция трех переменных f задана вектором значений (0000 0010) и необходимо найти набор, на котором f принимает значение 1. Т.к. 1 стоит на 7 месте, а нумерация в лексикографическом порядке начинается с 0, то необходимо найти двоичное разложение 6. Таким образом, функция f принимает значение 1 на наборе (110).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**Задание булевых функций посредством элементарных**

Если в логическую функцию вместо переменных подставить некоторые булевые функции, то в результате получается новая булевая функция, которая называется суперпозицией подставляемых функций (сложная функция). С помощью суперпозиции можно получать более сложные функции, которые могут зависить от любого числа переменных. Запись булевых функций через элементарные булевые функции будем называть формулой реализующей данную функцию.

**Пример**: Пусть задана элементарная булева функция xvy. Подставим вместо x функцию x1↓x2. Получаем функцию трех переменных (x1↓x2)vy. Если вместо переменной y подставить, например, x3⊕x4, то получаем новую функцию от четырех переменных: (x1↓x2)v(x3⊕x4). Очевидно, что таким образом мы будем получать булевы функции, которые будут выражаться через элементарные булевы функции.

Забегая вперед, отметим, что любая булева функция может быть представлена как суперпозиция элементарных функций. Для более компактной записи сложных функций введем следующие соглашения:

1) внешние скобки опускаются;

2) сначала производятся операции в скобках;

3) считается, что приоритет связок убывает в следующем порядке: ¬, &, v, →, ∼. Для равносильных связок и оставшихся связок {⊕,|,↓}, следует пока расставлять скобки.

**Примеры**: В формуле x·yvz скобки расставляются следующим образом: ((x·y)vz), т.к. операция & сильнее операции v согласно нашему соглашению.

1. В формуле xvy∼z→x скобки расставляются следующим образом: ((xvy)∼(z→x)).

2. В формуле (x⊕y)∼z→xyv¬z скобки расставляются следующим образом: ((x⊕y)∼(z→((xy)v(¬z)))).

3. Формула x→y→z, следуя нашему соглашению, записана не корректно, т.к. расстановка скобок приводит к двум разным функциям: ((x→y)→z) и (x→(y→z)).

**Существенные и несущественные переменные**

Булева функция y=f(x1,x2 ... xn) существенно зависит от переменной xk, если существует такой набор значений a1,a2 ... ak-1, ak+1, ak+2 ... an, что f(a1,a2 ... ak-1, **0**, ak+1, ak+2 ... an) ≠ f(a1, a2 ... ak-1, **1**, ak+1, ak+2 ... an).

В этом случае xk называют **существенной переменной**, в противном случае xk называют несущественной (фиктивной) переменной. Другими словами, переменная является несущественной, если ее изменение не изменяет значения функции.

**Пример**: Пусть булевы функции f1(x1,x2) и f2(x1,x2) заданы следующей [таблицей истинности](http://tablica-istinnosti.ru/):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x1 | x2 | f1(x1,x2) | f2(x1,x2) |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Для этих функций переменная x1 — существенная, а переменная x2 — несущественная.

Очевидно, что булевы функции не изменяют свои значения путем введения (или удаления) несущественных переменных. Поэтому, в дальнейшем булевы функции рассматриваются с точностью до несущественных переменных (в примере можно записать: f1(x1,x2)=x1, f2(x1,x2)=¬x1).

**Эквивалентные функции**

Зная [таблицу истинности](http://tablica-istinnosti.ru/) для элементарных функций, можно вычислить таблицу истинности той функции, которую реализует данная формула.

**Пример 1**: F1=X1•X2v(X1•¬X2v¬X1•X2)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X1•¬X2 | ¬X1•X2 | X1•¬X2v¬X1•X2 | X1•X2 | F1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Таким образом, формула F1 реализует дизъюнкцию.

**Пример 2**: F2=X1•X2→X1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X1•X2 | F2 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Таким образом, формула F2 реализует константу 1.

**Пример 3**: F3=((X1•X2)⊕X1)⊕X2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X1•X2 | (X1•X2)⊕X1 | F3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Таким образом, формула F3 реализует дизъюнкцию.

Булевы функции F1 и F2 называются эквивалентными, если на всяком наборе (a1, a2 ... an) нулей и единиц значения функций совпадают. Обозначение **эквивалентных функций** следующее: F1=F2.

Согласно приведенным примерам 1-3, можно написать:

X1•X2v(X1•¬X2v¬X1•X2)=X1vX2

X1•X2→X1=1

((X1•X2)⊕X1)⊕X2=X1vX2

**Основные эквивалентности**

Приводимые **основные эквивалентности** часто оказываются полезными при оперировании с булевыми функциями.

Ниже H, H1, H2 ... означают некоторые булевы функции.

1. Закон двойного отрицания:

H=¬(¬H)

2. Идемпотентность:

H&H=H

HvH=H

3. Коммутативность:

H1\*H2=H2\*H1, где символ \* означает одну из связок &, v, ⊕, ∼, |, ↓

4. Ассоциативность:

H1\*(H2\*H3)=(H1\*H2)\*H3, где символ \* означает одну из связок &, v, ⊕, ∼

5. Дистрибутивность:

H1&(H2vH3)=(H1&H2)v(H1&H3)

H1v(H2&H3)=(H1vH2)&(H1vH3)

H1&(H2⊕H3)=(H1&H2)⊕(H1&H3)

6. Законы де Моргана:

¬(H1&H2)=¬H1v¬H2

¬(H1vH2)=¬H1&¬H2

7. Правила поглощения:

H1v(H1&H2)=H1

H1&(H1vH2)=H1

8. Законы склеивания:

H1&H2vH1&¬H2=H1

(H1vH2)&(H1v¬H2)=H1

9. Законы инверсий:

Hv¬H=1

H&¬H=0

10. Правила операций с константами:

Hv1=1

H&1=H

Hv0=H

H&0=0

Для проверки истинности приведенных эквивалентностей достаточно построить соответствующие [таблицы истинности](http://tablica-istinnosti.ru/).

Отметим, что свойство ассоциативности операции позволяет распространить эту операцию для любого количества переменных. Так, например, запись XvYvZvW корректна, т.к. любая расстановка скобок приводит к одной и той же функции. Коммутативность операции позволяет менять местами переменные в формуле. Например, X&Y&Z&W=W&Y&X&Z.

**Функциональная полнота**

В типичной современной цифровой вычислительной машине цифрами являются 0 и 1. Следовательно, команды, которые выполняет процессор, суть булевы функции. Ниже будет показано, что любая булева функция реализуется через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Следовательно, можно построить нужный процессор, имея в распоряжении элементы, реализующие конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Этот раздел посвящен ответу на вопрос: существуют ли (и если существуют, то какие) другие системы булевых функций, обладающих тем свойством, что с их помощью можно выразить все другие функции.

Введем в рассмотрение ряд классов функций:

1. Класс функций, сохраняющих константу 0, т.е. таких функций y=f(x1,x2 ... xn), что f(0,0 ... 0)=0. Например, xvy(¬x).

2. Класс функций, сохраняющих константу 1, т.е. таких функций y=f(x1,x2 ... xn), что f(1,1 ... 1)=1. Например, xv¬(yx).

3. Класс самодвойственных функций, т.е. таких функций y=f(x1,x2 ... xn), что f(x1,x2 ... xn)=¬(f(¬x1,¬x2 ... ¬xn)).

4. Класс линейных функций, т.е. таких функций y=f(x1,x2 ... xn), которые могут быть представлены в виде f(x1,x2 ... xn)=c0⊕c1x1⊕c2x2⊕...⊕cnxn, где c0, c1, c2 - коэффициенты, которые могут принимать значение 0 или 1.

5. Класс монотонных функций. На множестве наборов из нулей и единиц Bn={(x1,x2 ... xn):xi∈{0,1},i=1,2...n} введем частичный порядок следующим образом: (a1,a2...an)=(b1,b2...bn) тогда и только тогда когда a1=b1, a2=b2 ... an=bn. Функция f(x1,x2 ... xn) называется монотонной, если для любых двух элементов из Bn таких, что (a1,a2 ... an)=(b1,b2 ... bn) следует, что f(a1,a2 ... an)=f(b1,b2 ... bn).

Система S булевых функций, суперпозицией которых может быть представлена любая булева функция, называется **функционально полной**. Говорят, что функционально полная система S булевых функций образует базис в логическом пространстве. Базис S называется минимальным, если удаление из него любой функции превращает эту систему в неполную.

Критерий полноты (Теорема Поста): Система S булевых функций является полной тогда и только тогда, когда она включает хотя бы одну функцию: не сохраняющую константу 0, не сохраняющую константу 1, не самодвойственную, нелинейную и немонотонную.

В таблице приведены свойства, которыми обладают элементарные булевы функции (символ \* - отмечает свойство, которым обладает данная функция).

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Название | Обозначение | Не сохранимость константы 0 | Не сохранимость константы 1 | Не самодвойственность | Не линейность | Не монотонность |
| Конст. 0 | 0 |  | \* | \* |  |  |
| Конст. 1 | 1 | \* |  | \* |  |  |
| Отриц. | ¬ | \* | \* |  |  | \* |
| Конъюн. | & |  |  | \* | \* |  |
| Дизъюн. | v |  |  | \* | \* |  |
| Имплик. | → | \* |  | \* | \* | \* |
| Эквивал. | ∼ | \* |  | \* |  | \* |
| Сумма по мод. 2 | ⊕ |  | \* | \* |  | \* |
| Штрих Шеффера | | | \* | \* | \* | \* | \* |
| Стрелка Пирса | ↓ | \* | \* | \* | \* | \* |

Используя теорему Поста и данную таблицу можно строить базисы из элементарных функций по следующему правилу. Выбрав любую элементарную булеву функцию и дополнив ее при необходимости другими функциями так, чтобы все они вместе удовлетворяли теореме о функциональной полноте. Через функции этого базиса можно выразить **все** другие булевы функции.

Построим некоторые часто используемые в приложениях базисы.

1. Система функций S1={¬,&,v} образует базис. Для приведения булевой функции к виду содержащему лишь связки из базиса S1 могут быть полезны следующие эквивалентности:

X→Y=¬XvY

X↔Y=(Xv¬Y)(¬XvY)

X⊕Y=¬XYvX¬Y

X|Y=¬Xv¬Y

X↓Y=¬X&¬Y

2. Система S2={¬,&} образует базис. Произвольную функцию можно сначала привести к виду, содержащему связки из S1, а затем использовать соотношение XvY=¬(¬X•¬Y).

3. Система S3={¬,v} образует базис. Произвольную функцию можно сначала привести к виду, содержащему связки из S1, а затем использовать соотношение X•Y=¬(¬Xv¬Y).

4. Система S4={1,&,⊕} образует базис. Произвольную функцию можно сначала привести к виду, содержащему связки из S1 а затем использовать соотношения:

¬X=1⊕X

XvY=X⊕Y⊕X•Y

5. Система S5={|} образует базис. Произвольную функцию можно сначала привести к виду, содержащему связки из S2 а затем использовать соотношения:

X•Y=¬(¬X|¬Y)

¬X=X|X

6. Система S6={↓} образует базис. Произвольную функцию можно сначала привести к виду, содержащему связки из S3 а затем использовать соотношения:

XvY=¬(¬X|¬Y)

¬X=X↓X

7. Система S7={→,0} образует базис.

**Пример**: Записать функцию X↔(Y⊕Z) в базисе S1={¬,&,v}.

X↔(Y⊕Z)=(Xv¬(Y⊕Z))•(¬Xv(Y⊕Z))=(Xv¬(¬Y•ZvY•¬Z))•(¬Xv¬Y•ZvY•Z)

**Нормальные формы**

**Нормальные формы** являются синтаксически однозначным способом записи формулы, реализующей заданную функцию.

Если х - логическая переменная, а σ∈{0,1} то выражение

|  |  |
| --- | --- |
| Xσ = { | x если σ=1 |
| ¬x если σ=0 |

или

|  |  |
| --- | --- |
| Xσ = { | 1 если x=σ |
| 0 если x≠σ |

называется литерой. Литеры x и ¬x называются контрарными. Конъюнктом называется конъюнкция литер. Дизъюнктом называется дизъюнкция литер. Например, формулы XY¬Z и XYX¬X являются конъюнктами, формулы XvYv¬Z и XvYv¬X - дизъюнктами, а формула ¬Z является одновременно и конъюнктом и дизъюнктом.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конечного числа конъюнктов.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция конечного числа дизъюнктов.

Более просто: ДНФ - это сумма произведений, а КНФ - это произведение логических сумм.

Примеры.

1. XYvYZvX - это ДНФ (сумма произведений).

2. (Xv¬Yv¬Z)(XvY)Z - это КНФ (произведение сумм).

3. ¬XvYvZv¬W - это ДНФ и КНФ (одновременно).

4. ¬XY¬ZW - это ДНФ и КНФ (одновременно).

5. (XvXvY)(YvZvX)Z - это КНФ.

6. XY¬Z и XYX¬X - это ДНФ.

7. X(XvYZ)¬(X¬YZ) - это не нормальная форма (не ДНФ и не КНФ).

Пусть функция f записана в базисе S1. Данная функция приводится к нормальной форме следующим путем:

1) используем законы де Моргана, чтобы преобразовать формулу к виду, в котором знаки отрицания относятся только к отдельным переменным;

2) применяем правило снятия двойного отрицания: ¬(¬X)=X

3) далее использовать законы дистрибутивности, причем необходимо использовать первый закон дистрибутивности для приведения к ДНФ

H1&(H2vH3)=(H1&H2)v(H1&H3),

и второй закон дистрибутивности для приведения к КНФ.

H1v(H2&H3)=(H1vH2)&(H1vH3).

Любая булева функция может иметь бесконечно много представлений в виде ДНФ и КНФ. Например, используя дополнительно законы инверсий и правила операций с константами можно добиться, чтобы в каждом отдельном конъюнкте или дизъюнкте любая переменная входила бы не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).

**Пример**: Для приведения к ДНФ используем 1-ый акон дистрибутивности.

X¬Y¬(XY¬vZ) = X¬Y(¬Xv¬Yv¬(¬Z))(YvZ) =

- это КНФ

=(0vX¬YvX¬YZ)(YvZ)=(X¬YvX¬YZ)(YvZ)=

- это другая КНФ

=X¬YYvX¬YZYvX¬YZvX¬YZZ = 0v0vX¬YZvX¬YZ = X¬YZvX¬YZ

- это ДНФ

**Пример**: Для приведения к КНФ необходимо использовать второй закон дистрибутивности.

XvY¬(XYv¬Z) = XvY(¬(XY)¬(¬Z)) = XvY(¬Xv¬Y)Z = XvYZ(¬Xv¬Y) = (XvYZ)(Xv¬Xv¬Y) =

=(XvY)(XvZ)(1v¬Y) = (XvY)(XvZ) - это КНФ

**Совершенные нормальные формы**

Если в каждом члене нормальной формы представлены все переменные (либо сами, либо их отрицания), причем в каждом отдельном конъюнкте или дизъюнкте любая переменная входит ровно один раз (либо сама, либо ее отрицание), то эта форма называется **совершенной нормальной формой** (СДНФ или СКНФ).

**Примеры:** Пусть задана функция трех переменных f(X,Y,Z).

1. ¬XYZ v X¬Y¬Z v ¬X¬Y¬Z - это совершенная ДНФ.

2. (XvYvZ)(Xv¬YvZ)(¬Xv¬YvZ) - это совершенная КНФ.

3. (XvY)(XvZ) - это не совершенная КНФ, т.к. например, в первую сумму не входит переменная Z.

4. XYZ - это совершенная ДНФ.

**Теорема**

1. Любая булева функция, не являющаяся тождественным нулем, имеет только одну СДНФ, с точностью до расположения членов.

2. Любая булева функция, не являющаяся тождественной 1, имеет только одну СКНФ, с точностью до расположения членов.

Доказательство теоремы проведем конструктивно, как решение следующей задачи: по данной [таблице истинности](http://tablica-istinnosti.ru/) построить СДНФ.

Решение рассмотрим на примере функции f(X,Y,Z) заданной таблично при n=3.

**Пример**. По данной таблице истинности построить СДНФ.

Решение.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | Основные конъюнкции | f(X,Y,Z) |
| 0 | 0 | 0 | ¬X¬Y¬Z | 0 |
| 0 | 0 | 1 | ¬X¬YZ | 1 |
| 0 | 1 | 0 | ¬XY¬Z | 1 |
| 0 | 1 | 1 | ¬XYZ | 0 |
| 1 | 0 | 0 | X¬Y¬Z | 0 |
| 1 | 0 | 1 | X¬YZ | 1 |
| 1 | 1 | 0 | XY¬Z | 1 |
| 1 | 1 | 1 | XYZ | 1 |

Основные конъюнкции (или конституенты\_1), включенные в таблицу, соответствуют конкретному набору нулей и единиц, которые принимают переменные X,Y,Z. Строятся конституенты\_1 по следующему правилу: переменная входит в произведение сама, если на данном наборе она принимает значение 1, в противном случае в произведение входит ее отрицание. Так, например, на наборе (0,0,1) переменные X,Y принимают значение 0 и поэтому в произведение входят их отрицания, а переменная Z принимает значение 1 и поэтому входит в произведение сама. Для данного набора (0,0,1) конституента\_1 равна ¬X¬YZ.

Очевидно, что конъюнкция ¬X¬Y¬Z равна 1 только на наборе (0,0,0), а ¬X¬YZ равна 1 на наборе (0,0,1) и т.д. (см. по таблице). Далее, заметим, что дизъюнкция двух основных конъюнкций равна 1 ровно на двух наборах, которые соответствуют данным основным конъюнкциям. Например, функция ¬X¬Y¬Z v ¬X¬YZ равна 1 только на двух наборах – (0,0,0) и (0,0,1), а на всех других наборах она равна 0. Аналогично, дизъюнкция трех основных конъюнкций равна 1 ровно на трех наборах, которые соответствуют данным основным конъюнкциям и т.д.

Т.е. получаем правило: для построения СДНФ следует выбрать строки, в которых функция равна 1, а затем взять дизъюнкцию соответствующих основных конъюнкций, получим искомую СДНФ. Так, для нашего примера, имеем

¬X¬YZ v ¬XY¬Z v X¬YZ v XY¬Z v XYZ

Задача. По данной таблице истинности построить СКНФ.

Конституента\_0 для набора нулей и единиц (которые принимают переменные X,Y,Z) строится следующим образом: переменная входит в дизъюнкцию сама, если на данном наборе она принимает значение 0, в противном случае в произведение входит ее отрицание.

Правило для построения СКНФ: следует выбрать строки, в которых функция равна 0, а затем взять конъюнкцию соответствующих конституент\_0. В результате получится искомая СКНФ. Так для нашего примера, имеем:

f=(XvYvZ)(Xv¬Yv¬Z)(¬XvYvZ)

Замечание. Для построения совершенной КНФ функции f, достаточно построить совершенную ДНФ для функции ¬f , а затем использовать f=¬(¬f) и законы де Моргана.

Построим СКНФ для нашего примера на основании замечания.

1. Строим СДНФ для отрицания.

¬X¬Y¬Z v ¬XYZ v X¬Y¬Z

2. Используем законы де Моргана

f=¬(¬f) = ¬(¬X¬Y¬Z v ¬XYZ v X¬Y¬Z) = ¬(¬X¬Y¬Z)&¬(¬XYZ)&¬(X¬Y¬Z) = (XvYvZ)(Xv¬Yv¬Z)(¬XvYvZ)

Описанный способ нахождения СДНФ (и СКНФ) по таблице истинности бывает часто более трудоемким, чем следующий алгоритм.

1. Для нахождения СДНФ данную формулу приводим сначала к ДНФ.

2. Если в некоторый конъюнкт К (т.е. К это произведение некоторого числа переменных или их отрицаний) не входит скажем переменная Y, то этот конъюнкт заменяем на эквивалентную формулу K&(Yv¬Y) и, применяя закон дистрибутивности, приводим полученную формулу к ДНФ; если недостающих переменных несколько, то для каждой из них к конъюнкту добавляем соответствующую формулу вида (Yv¬Y).

3. Если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конституент единицы, то оставляем только одну из них. В результате получается СДНФ.

**Замечание**: Для построения СКНФ в дизъюнкт не содержащий скажем переменную Y добавляем формулу вида Y¬Y, т.е. этот дизъюнкт заменяем на эквивалентную формулу D v Y¬Y и, применяя 2-й закон дистрибутивности.

**Пример**. Построить СДНФ для функции f при помощи эквивалентных преобразований.

f = XvYZ = X(Yv¬Y)(Zv¬Z)vYZ(Xv¬X) = XYZvXY¬ZvX¬YZvX¬Y¬ZvYZXvYZ¬X =

=XYZvXY¬ZvX¬YZvX¬Y¬ZvYZ¬X