

Задание: законспектируйте главные аспекты данной лекции.

Фото конспектов отправляйте на почту: kizunova.a.v.1510@gmail.com

Система счисления — символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков.

Символы, при помощи которых записывается число, называются **цифрами**.

Система счисления:

- даёт представления множества чисел (целых или вещественных)
- даёт каждому числу уникальное представление (или, по крайней мере, стандартное представление)
- отражает алгебраическую и арифметическую структуру чисел.

Разные народы в разные времена использовали разные системы счисления. Следы древних систем счета встречаются и сегодня в культуре многих народов. К древнему Вавилону восходит деление часа на 60 минут и угла на 360 градусов. К Древнему Риму - традиция записывать в римской записи числа I, II, III и т. д. К англосаксам - счет дюжинами: в году 12 месяцев, в футе 12 дюймов, сутки делятся на 2 периода по 12 часов.

По современным данным, развитые системы нумерации впервые появились в древнем Египте. Для записи чисел египтяне применяли иероглифы один, десять, сто, тысяча и т.д. Все остальные числа записывались с помощью этих иероглифов и операции сложения. Недостатки этой системы - невозможность записи больших чисел и громоздкость.

В конце концов, самой популярной системой счисления оказалась десятичная система. Десятичная система счисления пришла из Индии, где она появилась не позднее VI в. н. э. В ней всего 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 но информацию несет не только цифра, но также и место позиции, на которой она стоит. В числе 444 три одинаковых цифры обозначают количество и единиц, и десятков, и сотен. А вот в числе 400 первая цифра обозначает число сотен, два 0 сами по себе вклад в число не дают, а нужны лишь для указания позиции цифры 4.

Классификация систем счисления

Системы счисления подразделяются на позиционные и непозиционные.

Позиционные системы счисления

Позиционные системы счисления (СС) - это системы счисления, в которых количественный эквивалент каждой цифры (её вес) зависит от ее положения (позиции) в записи числа.

Путем долгого развития человечество пришло к созданию позиционного принципа записи чисел, который состоит в том, что каждая цифра, содержащаяся в записи числа, занимает определенное место, называемое разрядом. Отсчет разрядов производится справа налево. Единица каждого следующего разряда всегда превосходит единицу предыдущего разряда в определенное число раз. Это отношение носит название основание системы счисления (у непозиционных систем счисления понятия «разряда» и «основания» отсутствуют).

Например:

число **237** состоит из **3** цифр. Понятно, что отдельно взятая цифра **7** больше чем цифра **2**. Однако, в составе числа, двойка стоит на позиции сотен, а семёрка - на позиции единиц, поэтому количественное представление двойки - **две сотни**, или двести, а семёрка - всё та же **семь**.

Многие, кроме десятичной СС, о других позиционных системах не имеют представления, хотя и часто ими пользуются. Например:

1. шестидесятиричная (Древний Вавилон) - первая позиционная система счисления. До сих пор при измерении времени используется основание равное 60 ($1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$, $1 \text{ ч} = 60 \text{ мин}$);
2. двенадцатеричная система счисления (широкое распространение получила в XIX в. Число 12 - «дюжина»: в сутках две дюжины часов. Счет не по пальцам, а по суставам пальцев. На каждом пальце руки, кроме большого, по 3 сустава - всего 12;

В настоящее время наиболее распространенными позиционными системами счисления являются десятичная, двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная.

Общее свойство всех позиционных систем счисления: при каждом переходе влево (вправо) в записи числа на один разряд величина цифры увеличивается (уменьшается) во столько раз, чему равно основание системы счисления.

Достоинства позиционных систем счисления:

- в позиционных системах счисления устранены все недостатки непозиционных;
- в них можно записать любое число (как натуральное, так и действительное);
- запись чисел компактна и удобна;
- благодаря поразрядной организации записи чисел с ними легко проводить математические операции.

Непозиционные системы счисления

В непозиционных системах счисления величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе. Например: Римская система счисления.

Из многочисленных представителей этой группы в настоящее время сохранила свое значение лишь римская система счисления, где для обозначения цифр используются латинские буквы:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

С их помощью можно записывать натуральные числа. Например, число 1995 будет представлено, как MCMXCV (M-1000, CM-900, XC-90 и V-5).

Правила записи чисел в римской системе счисления:

- если большая цифра стоит перед меньшей, они складываются, например: VI – 6 (5+1);

- если меньшая цифра стоит перед большей, то из большей вычитается меньшая, причем в этом случае меньшая цифра уже повторяться не может, например: XL — 40 (50-10), XXL – нельзя;
- цифры M, C, X, I могут повторяться в записи числа не более трех раз подряд;
- цифры D, L, V могут использоваться в записи числа только по одному разу.

Например, запись XXX обозначает число 30, состоящее из трех цифр X, каждая из которых, независимо от места ее положения в записи числа, равна 10. Запись MCXXIV обозначает 1124, а самое большое число, которое можно записать в этой системе счисления, это число MMMCMXCIX (3999). Для записи еще больших чисел пришлось бы вводить все новые обозначения. По этой причине, а также по причине отсутствия цифры ноль, римская система счисления не годится для записи действительных чисел.

Таким образом, можно констатировать следующие основные недостатки непозиционных систем счисления:

- в них нельзя записать любое число;
- запись чисел обычно громоздка и неудобна;
- математические операции над ними крайне затруднены.

Алфавит и основание системы счисления

Алфавитом системы счисления называется совокупность различных цифр, используемых в позиционной системе счисления для записи чисел.

Например:

Десятичная система: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Двоичная система: {0, 1}

Восьмеричная система: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Шестнадцатеричная система: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

Количество цифр в алфавите равно основанию системы счисления. **Основанием** позиционной системы счисления называется

количество знаков или символов, используемых для изображения числа в данной системе счисления.

Базисом позиционной системы счисления называется последовательность чисел, каждое из которых задает количественное значение или «вес» каждого разряда. Например: Базисы некоторых позиционных систем счисления.

Десятичная система: $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \dots, 10^n, \dots$

Двоичная система: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots$

Восьмеричная система: $8^0, 8^1, 8^2, 8^3, 8^4, \dots, 8^n, \dots$

Пример. Десятичное число 4718,63, двоичное число 1001,1, восьмеричное число 7764,1, шестнадцатеричное число 3AF.

Позиция цифры в числе называется **разрядом**: разряд возрастает справа налево, от младших к старшим, начиная с нуля.

Развёрнутая форма представления числа

В позиционной системе счисления любое вещественное **число** в **развернутой форме** может быть представлено в следующем виде:

$$A = \pm (a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + a_{-2}q^{-2} + \dots + a_{-m}q^{-m})$$

Здесь:

A - само число,

q - основание системы счисления,

a_i - цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления,

n - число целых разрядов числа,

m - число дробных разрядов числа.

Развернутая форма записи числа - сумма произведений коэффициентов на степени основания системы счисления.

Пример. Десятичное число $A_{10} = 4718,63$ в развернутой форме запишется так:

$$A_{10} = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{Двоичное число } A_2 = 1001,1 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$$

$$\text{Восьмеричное число } A_8 = 7764,1 = 7 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^{-1}$$

$$\text{Шестнадцатеричное число } A_{16} = 3AF = 3 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$$