

Классическое определение вероятности

Основным понятием теории вероятностей является понятие **случайного события**.

Случайным событием называется событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти.

Например, попадание в некоторый объект или промах при стрельбе по этому объекту из данного орудия является случайным событием.

Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно происходит.

Невозможным называется событие, которое в результате испытания произойти не может.

КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ СХЕМА

Для нахождения вероятности случайного события A при проведении некоторого испытания следует:

1. найти число N всех возможных исходов данного испытания;
2. найти количество $N(A)$ тех исходов испытания, в которых наступает событие A ;
3. найти частное $N(A)/N$ — оно и будет равно вероятности события A .

Пример:

из колоды в 36 карт вынимается одна карта. Какова вероятность появления карты червовой масти?

Решение. Количество элементарных исходов (количество карт) $N=36$.

Событие A — появление карты червовой масти. Число случаев, благоприятствующих появлению события A , $N(A)=9$.

Следовательно, $P(A)=9/36=1/4=0,25$.

Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно происходит. **Невозможным** называется событие, которое в результате испытания произойти не может.

Случайные события называются **несовместными** в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Случайные события образуют **полную группу**, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними.

Рассмотрим полную группу равновозможных несовместных случайных событий. Такие события будем называть **исходами** или **элементарными событиями**. Исход называется **благоприятствующим** появлению события A , если появление этого исхода влечет за собой появление события A .

Пример. В урне находится 8 пронумерованных шаров (на каждом шаре поставлено по одной цифре от 1 до 8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные — черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, благоприятствующее появлению черного шара.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A , к

общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Вероятностью события A называют отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице
Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.
Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq P(A) \leq 1$.

В нижеприведённой таблице мы покажем связь между терминами теории вероятностей и теории множеств.

<i>Испытание с N исходами</i>	<i>Множество из N элементов</i>
Отдельный исход испытания	Элемент множества
Случайное событие	Подмножество
Невозможное событие	Пустое подмножество
Достоверное событие	Подмножество, совпадающее со всем множеством
Вероятность события	Доля элементов подмножества среди всех элементов множества

Случайные события называются не совместными в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Теорема

Если события A и B не совместны, то вероятность того, что наступит или A , или B , равна $P(A)+P(B)$.

Теорема

Для нахождения вероятности противоположного события следует из единицы вычесть вероятность самого события: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Но встречаются испытания и с бесконечным множеством исходов. К ним классическая вероятностная схема уже неприменима.

Сформулируем общее правило для нахождения **геометрических вероятностей**.

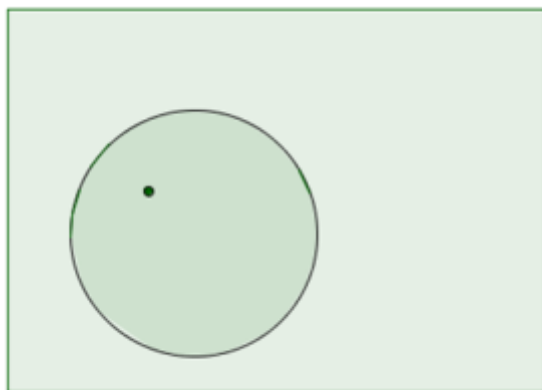
Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X , которая целиком содержит фигуру A , то получится вероятность того, что точка, случайно выбранная из фигуры X , окажется в фигуре A : $P = \frac{S(A)}{S(X)}$.

Аналогично поступают и с множествами на числовой прямой, и с пространственными телами. Но в этих случаях площади следует заменить или на длину числовых множеств, или на объёмы пространственных тел.

Пример: в прямоугольник $5 \times 4 \text{ cm}^2$ помещён круг радиуса $1,5 \text{ cm}$. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

Решение: по определению геометрической вероятности искомая вероятность равна отношению площади круга (в который точка должна попасть) к площади прямоугольника (в которой точка ставится), т.

е. $P = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{прямоугольника}}} = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 4 = 0,353$.



Примеры решений на классическую вероятность

https://www.matburo.ru/tvbook_sub.php?p=par12

Основные теоремы теории вероятностей

http://reshyzadachy.blogspot.com/2015/04/blog-post_26.html

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа исходов m , благоприятствующих его наступлению к числу всех исходов n (несовместных, единственно возможных и равновероятных):

$$P(A) = m/n.$$

Будем различать достоверные и невозможные события. По определению, их вероятности соответственно равны 1 и 0.

Геометрическое определение вероятности

Если число исходов некоторого опыта бесконечно, то классическое определение вероятности не может служить характеристикой степени возможности наступления того или иного события. В этом случае пользуются геометрическим подходом к определению вероятности. При этом вероятность события A есть отношение меры A (длины, площади, объема) к мере U пространства элементарных событий.

Теоремы о вероятностях событий

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие A , и событие B , т. е. оба события произошли.

Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. В противном случае события A и B называются *зависимыми*.

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению этих вероятностей: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Противоположные события

Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Два события называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Вероятности противоположных событий в сумме дают 1.

Если событие A может произойти с вероятностью p и опыт повторяют n раз, то вероятность, что оно наступит хотя бы один раз, есть: $1 - q^n$, где $q = 1 - p$.

Сложение вероятностей

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B , т. е. в наступлении события A , или события B , или обоих этих событий вместе, если они совместны.

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Условная вероятность

Пусть A и B — зависимые события. Условной вероятностью $P_A(B)$ события B называется вероятность события B , найденная в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Формула Бернулли

Для многократно повторяемых опытов справедлива формула Бернулли:

$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где m — число удачных исходов среди проводимых n опытов, p — вероятность наступления благоприятного исхода в единичном опыте, $q = 1 - p$.

Рассмотрим некоторые задачи с решениями.

Задание 5. № 319353. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение.

Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное:
 $0,45 \cdot 0,03 = 0,0135$.

Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное:
 $0,55 \cdot 0,01 = 0,0055$.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0,0135 + 0,0055 = 0,019$.

Ответ: 0,019.

Задание 5. № 319355. Если гроссмейстер A играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера B с вероятностью 0,52. Если A играет черными, то A выигрывает у B с

вероятностью 0,3. Гроссмейстеры A и B играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что A выиграет оба раза.

Решение.

Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$0,52 \cdot 0,3 = 0,156.$$

Ответ: 0,156.

Задание 5. № 320171. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:
 $0,2 + 0,15 = 0,35$.

Ответ: 0,35.

Задание 5. № 320172. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе.

Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение.

Рассмотрим события

A = кофе закончится в первом автомате,
 B = кофе закончится во втором автомате.

Тогда

$A \cdot B$ = кофе закончится в обоих автоматах,
 $A + B$ = кофе закончится хотя бы в одном автомате.

По условию $P(A) = P(B) = 0,3$; $P(A \cdot B) = 0,12$.

События A и B совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,3 + 0,3 - 0,12 = 0,48.$$

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна $1 - 0,48 = 0,52$.

Ответ: 0,52.

Можно привести и другое решение.

Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна $1 - 0,3 = 0,7$. Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна $1 - 0,3 = 0,7$. Вероятность того, что кофе останется в первом или втором автомате равна $1 - 0,12 = 0,88$.

Поскольку $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, имеем: $0,88 = 0,7 + 0,7 - x$, откуда искомая вероятность $x = 0,52$.

Примечание.

Важно понимать, что события A и B не являются независимыми. Действительно, вероятность произведения независимых событий была бы равна произведению

вероятностей этих событий: $P(A \cdot B) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$, однако по условию эта вероятность равна 0,12.

Задание 5. № 320173. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение.

Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью $1 - 0,8 = 0,2$. События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна

$$0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,02048 \approx 0,02$$

Ответ: 0,02.

Задание 5. № 320174. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение.

Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:
 $0,05 \cdot 0,05 = 0,0025$.

Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0,0025 = 0,9975$.

Ответ: 0,9975.

Есть другое решение.

Вероятность того, что исправен первый автомат (событие A) равна 0,95. Вероятность того, что исправен второй автомат (событие B) равна 0,95. Это совместные независимые события. Вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий, а вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Имеем:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,95 + 0,95 - 0,95 \cdot 0,95 = 0,9975.$$