http://mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html

Уравнение прямой на плоскости.
Направляющий вектор прямой. Вектор нормали

Прямая линия на плоскости – это одна из простейших геометрических фигур, знакомая вам ещё с младших классов, и сегодня мы узнаем, как с ней справляться методами аналитической геометрии. Для освоения материала необходимо уметь строить прямую; знать, каким уравнением задаётся прямая, в частности, прямая, проходящая через начало координат и прямые, параллельные координатным осям. Данную информацию можно найти в методичке **Графики и свойства элементарных функций**, я её создавал для матана, но раздел про линейную функцию получился очень удачным и подробным. Поэтому, уважаемые чайники, сначала разогрейтесь там. Кроме того, нужно обладать базовыми знаниями о **векторах**, иначе понимание материала будет неполным.

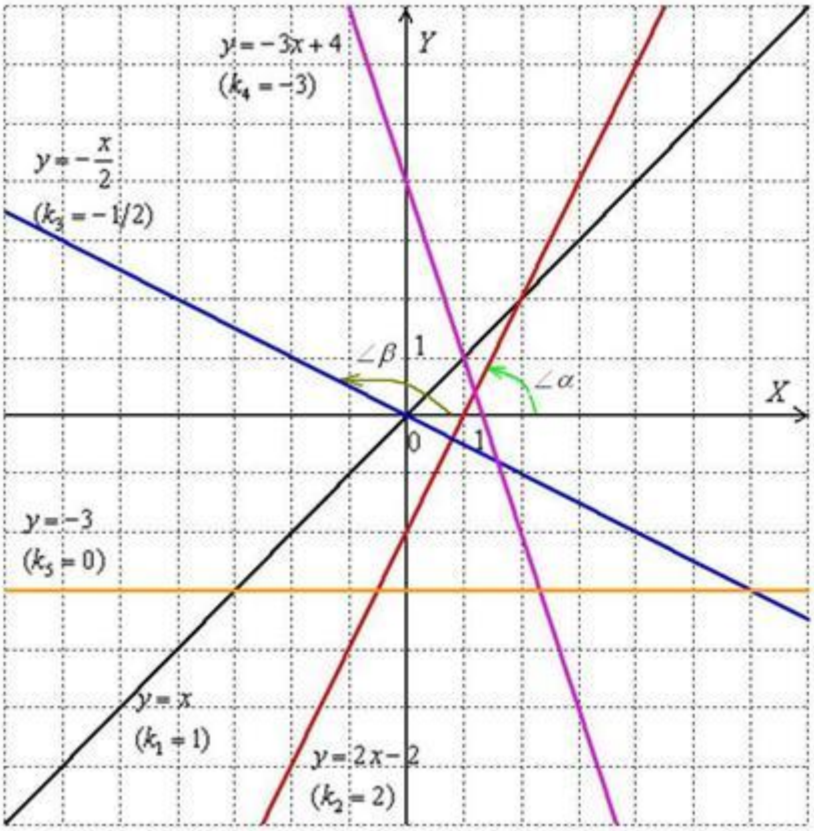
На данном уроке мы рассмотрим способы, с помощью которых можно составить уравнение прямой на плоскости. Рекомендую не пренебрегать практическими примерами (даже если кажется очень просто), так как я буду снабжать их элементарными и важными фактами, техническими приёмами, которые потребуются в дальнейшем, в том числе и в других разделах высшей математики.

Для подготовленных читателей **быстрые ссылки**:

и мы начинаем:

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Всем известный «школьный» вид уравнения прямой $y = kx + b$ называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом** k. Например, если прямая задана уравнением $y = 2x - 2$, то её угловой коэффициент: $k = 2$. Рассмотрим геометрический смысл данного коэффициента и то, как его значение влияет на расположение прямой:



В курсе геометрии доказывается, что **угловой коэффициент прямой равен <u>тангенсу угла</u> между положительным направлением оси** OX **и данной прямой**: $k = tg\varphi$, причём угол φ «откручивается» против часовой стрелки.

Чтобы не загромождать чертёж, я нарисовал углы только для двух прямых. Рассмотрим «красную» прямую $y = 2x - 2$ и её угловой коэффициент $k_2 = 2$. Согласно вышесказанному: $tg\alpha = 2$ (угол «альфа» обозначен зелёной дугой).

Для «синей» прямой $y = -\frac{x}{2}$ с угловым коэффициентом $k_3 = -\frac{1}{2}$ справедливо равенство $tg\beta = -\frac{1}{2}$ (угол «бета» обозначен коричневой дугой). А если известен тангенс угла, то при необходимости легко найти <u>и сам угол</u> с помощью обратной функции – арктангенса. Как говорится, [тригонометрическая таблица](#) или микрокалькулятор в руки. Таким образом, **угловой коэффициент характеризует степень наклона прямой к оси абсцисс**.

При этом возможны следующие случаи:

1) Если угловой коэффициент отрицателен: $k < 0$, то линия, грубо говоря, идёт сверху вниз. Примеры – «синяя» и «малиновая» прямые на чертеже.

2) Если угловой коэффициент положителен: $k > 0$, то линия идёт снизу вверх. Примеры – «чёрная» и «красная» прямые на чертеже.

3) Если угловой коэффициент равен нулю: $k = 0$, то уравнение $y = kx + b$ принимает вид $y = b$, и соответствующая прямая параллельна оси OX. Пример – «жёлтая» прямая.

4) Для семейства прямых $x = C$, где $C = const$, параллельных оси OY (на чертеже нет примера, кроме самой оси OY), углового коэффициента <u>не существует</u> *(тангенс 90 градусов не определён)*.

Чем больше угловой коэффициент по модулю, тем круче идёт график прямой.

Например, рассмотрим две прямые $y = 2x - 2\ (k_2 = 2), \quad y = -3x + 4\ (k_4 = -3)$.
Здесь $|k_4| > |k_2|$, поэтому прямая $y = -3x + 4$ имеет более крутой наклон. Напоминаю, что модуль позволяет не учитывать знак, нас интересуют только *абсолютные значения* угловых коэффициентов.

В свою очередь, прямая $y = 2x - 2$ более крутА, чем прямые $y = x, \quad y = -\frac{x}{2}$.

Обратно: чем меньше угловой коэффициент по модулю, тем прямая является более пологой.

Для прямых $y = x\ (k_1 = 1), \quad y = -\frac{x}{2}\ (k_3 = -1/2)$ справедливо неравенство $|k_3| < |k_1|$, таким образом, прямая $y = -\frac{x}{2}$ более полога. Детская горка, чтобы не насадить себе синяков и шишек.

Зачем это нужно?

~~Продлить ваши мучения~~ Знания вышеперечисленных фактов позволяет немедленно увидеть свои ошибки, в частности, ошибки при построении графиков – если на чертеже получилось «явно что-то не то». Желательно, чтобы вам <u>сразу</u> было понятно, что, например, прямая $y = 10x + 1$ весьма крутА и идёт снизу вверх, а прямая $y = -\frac{x}{20} - 3$ – очень полога, близко прижата к оси OX и идёт сверху вниз.

В геометрических задачах часто фигурируют несколько прямых, поэтому их удобно как-нибудь обозначать.

Обозначения: прямые обозначаются маленькими латинскими буквами: $a, b, c, d, \ldots, l, m, n, \ldots$. Популярный вариант – обозначение одной и той же буквой с натуральными подстрочными индексами. Например, те пять прямых, которые мы только что рассмотрели, можно обозначить через m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.

Поскольку любая прямая однозначно определяется двумя точками, то её можно обозначать данными точками: AB, CD, KL, PR и т.д.

Обозначение AB совершенно очевидно подразумевает, что точки A и B принадлежат прямой AB.

Пора немного размяться:

Как составить уравнение прямой с угловым коэффициентом?

Если известна точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая некоторой прямой, и угловой коэффициент k этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Пример 1

Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{2}$, если известно, что точка $A(3; -2)$ принадлежит данной прямой.

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$. В данном случае:

$$y - (-2) = \frac{3}{2} \cdot (x - 3)$$

$$y + 2 = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

Ответ: $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

Проверка выполняется элементарно. Во-первых, смотрим на полученное уравнение $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$ и убеждаемся, что наш угловой коэффициент $k = \frac{3}{2}$ на своём месте. Во-вторых, координаты точки $A(3; -2)$ должны удовлетворять данному уравнению. Подставим их в уравнение:

$$-2 = \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{13}{2}$$

$$-2 = \frac{9}{2} - \frac{13}{2}$$

$$-2 = -2$$

Получено верное равенство, значит, точка $A(3; -2)$ удовлетворяет полученному уравнению.

Вывод: уравнение найдено правильно.

Более хитрый пример для самостоятельного решения:

Пример 2

Составить уравнение прямой, если известно, что её угол наклона к положительному направлению оси OX составляет $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, и точка $K(-2; 1)$ принадлежит данной прямой.

Если возникли затруднения, перечитайте теоретический материал. Точнее больше практический, многие доказательства я пропускаю.

Прозвенел последний звонок, отгремел выпускной бал, и за воротами родной школы нас поджидает, собственно, аналитическая геометрия. Шутки закончились…. А может быть только начинаются =)

Общее уравнение прямой

Ностальгически машем ручкой привычному $y = kx + b$ и знакомимся с общим уравнением прямой. Поскольку в аналитической геометрии в ходу именно оно:

Общее уравнение прямой имеет вид: $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – некоторые числа. При этом коэффициенты A, B *одновременно* не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

Оденем в костюм и галстук уравнение с угловым коэффициентом $y = 2x - 2$. Сначала перенесём все слагаемые в левую часть:
$y - 2x + 2 = 0$

Слагаемое с «иксом» нужно поставить на первое место:
$-2x + y + 2 = 0$

В принципе, уравнение уже имеет вид $Ax + By + C = 0$, но по правилам математического этикета коэффициент первого слагаемого (в данном случае A) должен быть положительным. Меняем знаки:
$2x - y - 2 = 0$

Готово.

Запомните эту техническую особенность! Первый коэффициент (чаще всего A) делаем положительным!

В аналитической геометрии уравнение прямой почти всегда будет задано в общей форме. Ну, а при необходимости его легко привести к «школьному» виду с угловым коэффициентом $y = kx + b$ (за исключением прямых, параллельных оси ординат).

Направляющий вектор прямой

Зададимся вопросом, что *достаточно* знать, чтобы построить прямую? Две точки. Но об этом детском случае позже, сейчас властвуют палочки со стрелочками. У каждой прямой есть вполне определённый наклон, к которому легко «приспособить» вектор.

Вектор, который параллелен прямой, называется направляющим вектором данной прямой. Очевидно, что у любой прямой бесконечно много направляющих векторов, причём все они будут коллинеарны (сонаправлены или нет – не важно).

Направляющий вектор я буду обозначать следующим образом: $\bar{p}(p_1; p_2)$.

Сразу небольшая ремарка: при появлении трудностей в понимании терминов, пожалуйста, прочитайте (или перечитайте) статью Векторы для чайников.

Но одного вектора недостаточно для построения прямой, вектор является свободным и не привязан к какой-либо точке плоскости. Поэтому дополнительно необходимо знать некоторую точку $M(x_0; y_0)$, которая принадлежит прямой.

Как составить уравнение прямой по точке и направляющему вектору?

Если известна некоторая точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\bar{p}(p_1; p_2)$ этой прямой $(p_1 \neq 0, p_2 \neq 0)$, то уравнение данной прямой можно составить по формуле:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$$

Иногда его называют ***каноническим уравнением прямой***.

Что делать, когда *одна из координат* p_1, p_2 равна нулю, мы разберёмся в практических примерах ниже. Кстати, заметьте – *сразу обе* координаты не могут равняться нулю, так как нулевой вектор не задаёт конкретного направления.

Пример 3

Составить уравнение прямой по точке $M(1; 2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(2; 1)$

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$. В данном случае:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1}$$

С помощью свойств пропорции избавляемся от дробей:

$$1 \cdot (x - 1) = 2 \cdot (y - 2)$$

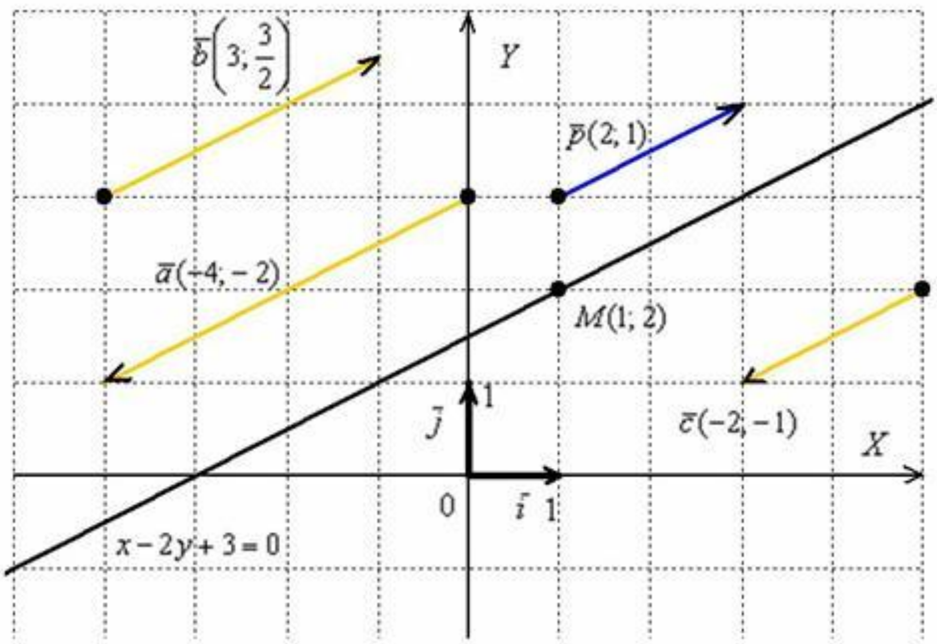
И приводим уравнение к общему виду:

$$x - 1 = 2y - 4$$

$$x - 2y + 3 = 0$$

Ответ: $x - 2y + 3 = 0$

Чертежа в таких примерах, как правило, делать не нужно, но понимания ради:



На чертеже мы видим исходную точку $M(1;2)$, исходный направляющий вектор $\overline{p}(2;1)$ (его можно отложить от любой точки плоскости) и построенную прямую $x-2y+3=0$. Кстати, во многих случаях построение прямой удобнее всего осуществлять как раз с помощью уравнения с угловым коэффициентом.

Наше уравнение $x-2y+3=0$ легко преобразовать к виду $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ и без проблем подобрать ещё одну точку для построения прямой.

Как отмечалось в начале параграфа, у прямой бесконечно много направляющих векторов, и все они коллинеарны. Для примера я нарисовал три таких вектора: $\overline{a}(-4;-2), \overline{b}\left(3;\frac{3}{2}\right), \overline{c}(-2;-1)$. Какой бы направляющий вектор мы не выбрали, в результате всегда получится одно и то же уравнение прямой $x-2y+3=0$.

Составим уравнение прямой по точке $M(1;2)$ и направляющему вектору $\overline{a}(-4;-2)$:

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{-2}$$

Разруливаем пропорцию:

$$-2\cdot(x-1)=-4\cdot(y-2)$$

Делим обе части на –2 и получаем знакомое уравнение: $x-1=2\cdot(y-2)$

Желающие могут аналогичным образом протестировать векторы $\overline{b}\left(3;\frac{3}{2}\right), \overline{c}(-2;-1)$ или любой другой коллинеарный вектор.

Теперь решим обратную задачу:

Как найти направляющий вектор по общему уравнению прямой?

Очень просто:

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$, то вектор $\bar{p}(-B;A)$ является направляющим вектором данной прямой.

Примеры нахождения направляющих векторов прямых:

$1)\ 5x+7y-1=0 \Rightarrow \quad \bar{p}(-7;5)$

$2)\ 2y+3=0 \ \ (0\cdot x+2y+3=0) \Rightarrow \quad \bar{p}(-2;0)$

$3)\ 5x-2=0 \ \ (5x+0\cdot y-2=0) \Rightarrow \quad \bar{p}(0;5)$

Утверждение позволяет найти лишь один направляющий вектор из бесчисленного множества, но нам больше и не нужно. Хотя в ряде случаев координаты направляющих векторов целесообразно сократить:

Так, уравнение $2y+3=0$ задаёт прямую, которая параллельна оси OX и координаты полученного направляющего вектора $\bar{p}(-2;0)$ удобно разделить на –2, получая в точности базисный вектор $\bar{i}(1;0)$ в качестве направляющего вектора. Логично.

Аналогично, уравнение $5x-2=0$ задаёт прямую, параллельную оси OY, и, разделив координаты вектора $\bar{p}(0;5)$ на 5, получаем в качестве направляющего вектора орт $\bar{j}(0;1)$.

Читателям с низким уровнем подготовки рекомендую постоянно выполнять чертежи, чтобы лучше понимать мои объяснения.

Теперь выполним **проверку Примера 3**. Пример уехал вверх, поэтому напоминаю, что в нём мы составили уравнение прямой $x-2y+3=0$ по точке $M(1;2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(2;1)$

<u>Во-первых</u>, по уравнению прямой $x-2y+3=0$ восстанавливаем её направляющий вектор: $\bar{p}(-B;A)=\bar{p}(2;1)$ – всё нормально, получили исходный вектор (в ряде случаев может получиться коллинеарный исходному вектор, и это обычно несложно заметить по пропорциональности соответствующих координат).

<u>Во-вторых</u>, координаты точки $M(1;2)$ должны удовлетворять уравнению $x-2y+3=0$. Подставляем их в уравнение:

$1-2\cdot 2+3=0$

$1-4+3=0$

$0=0$

Получено верное равенство, чему мы очень рады.

Вывод: задание выполнено правильно.

<u>Пример 4</u>

Составить уравнение прямой по точке $M(0;-3)$ и направляющему вектору $\bar{p}(-7;5)$

Это пример для самостоятельного решения. Решение и ответ в конце урока. Крайне желательно сделать проверку по только что рассмотренному алгоритму. Старайтесь всегда (если это возможно) выполнять проверку на черновике. Глупо допускать ошибки там, где их 100%-но можно избежать.

В том случае, если одна из координат направляющего вектора нулевая, поступают очень просто:

Пример 5

Составить уравнение прямой по точке $A(-4;2)$ и направляющему вектору $\overline{p}(4;0)$.

Решение: Формула $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$ не годится, так как знаменатель правой части равен нулю. Выход есть! Используя свойства пропорции, перепишем формулу в виде $p_2\cdot(x-x_0)=p_1\cdot(y-y_0)$, и дальнейшее покатилось по глубокой колее:

$0\cdot(x-(-4))=4\cdot(y-2)$

$0=4\cdot(y-2)$

$4\cdot(y-2)=0$

$y-2=0$

Ответ: $y-2=0$

Проверка:

1) Восстановим направляющий вектор прямой $0\cdot x+y-2=0$:
$\overline{p}(-B;A)=\overline{p}(-1;0)$ – полученный вектор коллинеарен исходному направляющему вектору.

2) Подставим координаты точки $A(-4;2)$ в уравнение $0\cdot x+y-2=0$:
$0\cdot(-4)+2-2=0$

$0=0$
Получено верное равенство

Вывод: задание выполнено правильно

Возникает вопрос, зачем маяться с формулой $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$, если существует универсальная версия $p_2\cdot(x-x_0)=p_1\cdot(y-y_0)$, которая сработает в любом случае? Причин две. Во-первых, формула в виде дроби $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$ **гораздо лучше запоминается**. А во-вторых, недостаток универсальной формулы $p_2\cdot(x-x_0)=p_1\cdot(y-y_0)$ состоит в том, что **заметно повышается риск запутаться** при подстановке координат.

Пример 6

Составить уравнение прямой по точке $A(0;3)$ и направляющему вектору $\overline{j}(0;1)$.

Это пример для самостоятельного решения.

Вернёмся к вездесущим двум точкам:

Как составить уравнение прямой по двум точкам?

Если известны две точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, то уравнение прямой, проходящей через данные точки, можно составить по формуле:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

На самом деле это разновидность формулы $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$ и вот почему: если известны две точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{M_1M_2}$ будет направляющим вектором данной прямой. На уроке **Векторы для чайников** мы рассматривали простейшую задачу – как найти координаты вектора по двум точкам. Согласно данной задаче, координаты направляющего вектора: $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

Примечание: *точки можно «поменять ролями» и использовать формулу* $\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$. *Такое решение будет равноценным.*

<u>Пример 7</u>

Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right), B(-1; 7)$.

Решение: Используем формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{-1 - \frac{3}{2}} = \frac{y - \frac{7}{3}}{7 - \frac{7}{3}}$$

Причёсываем знаменатели:

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{y - \frac{7}{3}}{\frac{14}{3}}$$

И перетасовываем колоду:

$$\frac{14}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \left(y - \frac{7}{3}\right)$$

Именно сейчас удобно избавиться от дробных чисел. В данном случае нужно умножить обе части на 6:

$$6 \cdot \frac{14}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2} \cdot 6 \cdot \left(y - \frac{7}{3}\right)$$

$$28 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = -15 \cdot \left(y - \frac{7}{3}\right)$$

Раскрываем скобки и доводим уравнение до ума:

$$28x - 42 = -15y + 35$$

$$28x - 42 + 15y - 35 = 0$$

Ответ: $AB: 28x + 15y - 77 = 0$

Проверка очевидна – координаты исходных точек должны удовлетворять полученному уравнению:

1) Подставим координаты точки $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right)$:

$$28 \cdot \frac{3}{2} + 15 \cdot \frac{7}{3} - 77 = 0$$

$$42 + 35 - 77 = 0$$

$$0 = 0$$

Верное равенство.

2) Подставим координаты точки $B(-1; 7)$:

$$28 \cdot (-1) + 15 \cdot 7 - 77 = 0$$

$$-28 + 105 - 77 = 0$$

$$0 = 0$$

Верное равенство.

Вывод: уравнение прямой составлено правильно.

Если *хотя бы одна* из точек не удовлетворяет уравнению, ищите ошибку.

Стоит отметить, что графическая проверка в данном случае затруднительна, поскольку построить прямую $AB: 28x + 15y - 77 = 0$ и посмотреть, принадлежат ли ей точки $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right), B(-1; 7)$, не так-то просто.

Отмечу ещё пару технических моментов решения. Возможно, в данной задаче выгоднее воспользоваться зеркальной формулой $\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$ и, по тем же точкам $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right), B(-1; 7)$ составить уравнение:

$$\frac{x - (-1)}{\frac{3}{2} - (-1)} = \frac{y - 7}{\frac{7}{3} - 7}$$

Таки дробей поменьше. Если хотите, можете довести решение до конца, в результате должно получиться то же самое уравнение.

Второй момент состоит в том, чтобы посмотреть на итоговый ответ и прикинуть, нельзя ли его ещё упростить? Например, если получилось уравнение $2x - 4y + 6 = 0$, то здесь целесообразно сократить на двойку: $x - 2y + 3 = 0$ – уравнение будет задавать ту же самую прямую. Впрочем, это уже тема разговора о **взаимном расположении прямых**.

Получив ответ $28x + 15y - 77 = 0$ в Примере 7, я на всякий случай, проверил, не делятся ли ВСЕ коэффициенты уравнения на 2, 3 или 7. Хотя, чаще всего подобные сокращения осуществляются ещё по ходу решения.

Пример 8

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $K(8; 2), L\left(3; \frac{3}{4}\right)$.

Это пример для самостоятельного решения, который как раз позволит лучше понять и отработать технику вычислений.

Аналогично предыдущему параграфу: если в формуле $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ один из знаменателей (координата направляющего вектора) обращается в ноль, то переписываем её в виде $(y_2-y_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(y-y_1)$. И снова заметьте, как неуклюже и запутанно она стала выглядеть. Не вижу особого смысла приводить практические примеры, поскольку такую задачу мы уже фактически прорешали (см. № 5, 6).

Вектор нормали прямой (нормальный вектор)

Что такое нормаль? Простыми словами, нормаль – это перпендикуляр. То есть, вектор нормали прямой перпендикулярен данной прямой. Очевидно, что у любой прямой их бесконечно много (так же, как и направляющих векторов), причём все векторы нормали прямой будут коллинеарными (сонаправленными или нет – без разницы).

Разборки с ними будут даже проще, чем с направляющими векторами:

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$ в прямоугольной системе координат, то вектор $\overline{n}(A;B)$ является вектором нормали данной прямой.

Если координаты направляющего вектора $\overline{p}(-B;A)$ приходится аккуратно «вытаскивать» из уравнения, то координаты вектора нормали $\overline{n}(A;B)$ достаточно просто «снять».

Вектор нормали всегда ортогонален направляющему вектору прямой. Убедимся в ортогональности данных векторов с помощью скалярного произведения:
$\overline{p}\cdot\overline{n}=-B\cdot A+A\cdot B=0\Rightarrow\overline{p}\perp\overline{n}$

Приведу примеры с теми же уравнениями, что и для направляющего вектора:
1) $5x+7y-1=0\Rightarrow\quad\overline{n}(5;7)$
2) $2y+3=0\ \ (0\cdot x+2y+3=0)\Rightarrow\quad\overline{n}(0;2)$
3) $5x-2=0\ \ (5x+0\cdot y-2=0)\Rightarrow\quad\overline{n}(5;0)$

Можно ли составить уравнение прямой, зная одну точку и вектор нормали? Нутром чувствуется, можно. Если известен вектор нормали, то однозначно определено и направление самой прямой – это «жёсткая конструкция» с углом в 90 градусов.

Как составить уравнение прямой по точке и вектору нормали?

Если известна некоторая точка $M(x_0;y_0)$, принадлежащая прямой, и вектор нормали $\overline{n}(n_1;n_2)$ этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой:

$$n_1\cdot(x-x_0)+n_2\cdot(y-y_0)=0$$

Тут всё обошлось без дробей и прочих нежданчиков. Такой вот у нас нормальный вектор. Любите его. И уважайте =)

Пример 9

Составить уравнение прямой по точке $M(-1;-3)$ и вектору нормали $\overline{n}(3;-1)$. Найти направляющий вектор прямой.

Решение: Используем формулу:

$$n_1 \cdot (x-x_0)+n_2 \cdot (y-y_0)=0$$
$$3\cdot(x-(-1))-1\cdot(y-(-3))=0$$
$$3\cdot(x+1)-(y+3)=0$$
$$3x+3-y-3=0$$
$$3x-y=0$$

Общее уравнение прямой получено, выполним проверку:

1) «Снимаем» координаты вектора нормали с уравнения $3x-y=0$: $\overline{n}(A;B)=\overline{n}(3;-1)$ – да, действительно, получен исходный вектор из условия (либо должен получиться коллинеарный исходному вектор).

2) Проверим, удовлетворяет ли точка $M(-1;-3)$ уравнению $3x-y=0$:

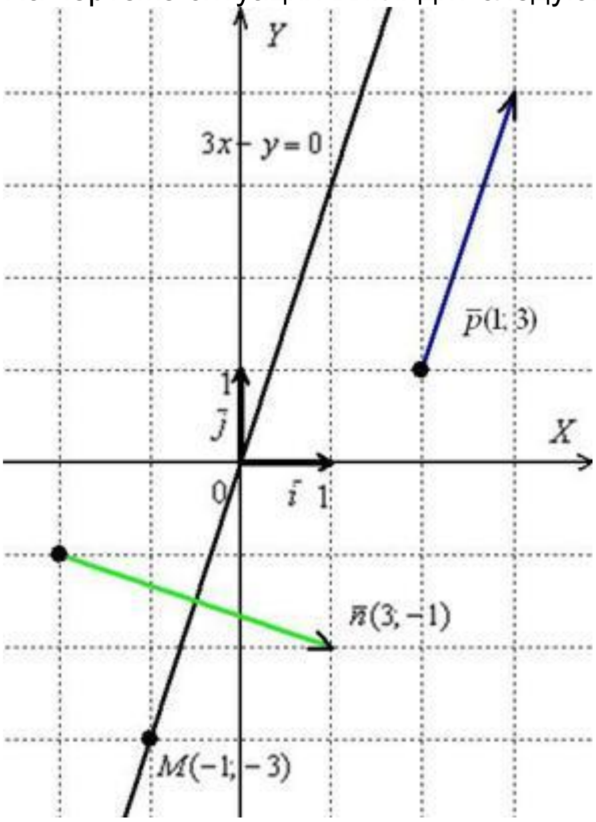
$$3\cdot(-1)-(-3)=0$$
$$-3+3=0$$
$$0=0$$

Верное равенство.

После того, как мы убедились в том, что уравнение составлено правильно, выполним вторую, более лёгкую часть задания. Вытаскиваем направляющий вектор прямой: $\overline{p}(-B;A)=\overline{p}(1;3)$

Ответ: $3x-y=0, \quad \overline{p}(1;3)$

На чертеже ситуация выглядит следующим образом:



В целях тренировки аналогичная задача для самостоятельного решения:

<u>Пример 10</u>

Составить уравнение прямой по точке $A(0;2)$ и нормальному вектору $\bar{n}(-8;6)$. Найти направляющий вектор прямой.

Заключительный раздел урока будет посвящен менее распространённым, но тоже важным видам уравнений прямой на плоскости

Уравнение прямой в отрезках.
Уравнение прямой в параметрической форме

Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{M}+\frac{y}{N}=1$, где M, N – ненулевые константы. Некоторые типы уравнений нельзя представить в таком виде, например, прямую пропорциональность $Ax+By=0$ (так как свободный член C равен нулю и единицу в правой части никак не получить).

Это, образно говоря, «технический» тип уравнения. Обыденная задача состоит в том, чтобы общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ представить в виде уравнения прямой в отрезках $\frac{x}{M}+\frac{y}{N}=1$. Чем оно удобно? Уравнение прямой в отрезках позволяет быстро найти точки пересечения прямой с координатными осями, что бывает очень важным в некоторых задачах высшей математики.

Найдём точку пересечения прямой с осью OX. Обнуляем «игрек», и уравнение принимает вид $\frac{x}{M}=1$. Нужная точка получается автоматически: $M_1(M;0)$.

Аналогично с осью $OY: x=0 \Rightarrow \frac{y}{N}=1 \Rightarrow M_2(0;N)$ – точка, в которой прямая пересекает ось ординат.

Действия, которые я только что подробно разъяснил, выполняются устно.

Пример 11

Дана прямая $5x-7y+11=0$. Составить уравнение прямой в отрезках и определить точки пересечения графика с координатными осями.

Решение: Приведём уравнение к виду $\frac{x}{M}+\frac{y}{N}=1$. Сначала перенесём свободный член в правую часть:

$$5x-7y=-11$$

Чтобы получить справа единицу, разделим каждый член уравнения на –11:

$$\frac{5x}{-11}+\frac{7y}{11}=1$$

Делаем дроби трёхэтажными:

$$\frac{x}{\left(\frac{-11}{5}\right)}+\frac{y}{\frac{11}{7}}=1$$

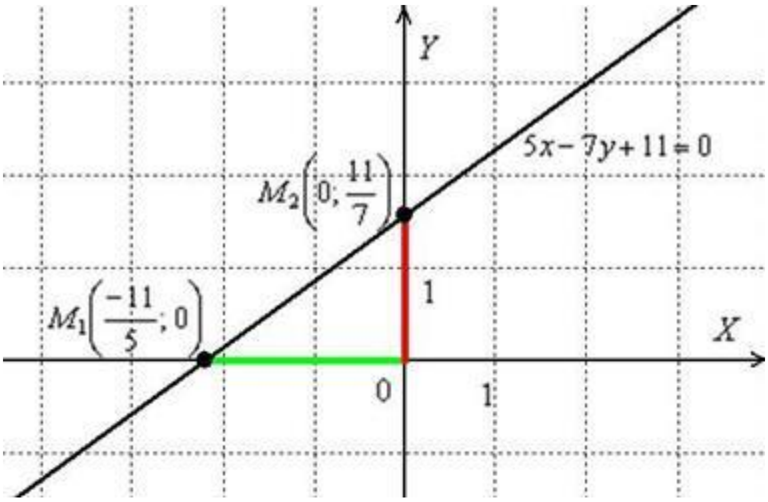
Точки пересечения прямой с координатными осями всплыли на поверхность:

$$M_1(M;0)=M_1\left(\frac{-11}{5};0\right)$$

$$M_2(0;N)=M_2\left(0;\frac{11}{7}\right)$$

Ответ: $\frac{x}{\left(\frac{-11}{5}\right)}+\frac{y}{\frac{11}{7}}=1 \qquad M_1\left(\frac{-11}{5};0\right), M_2\left(0;\frac{11}{7}\right)$

Осталось приложить линеечку и провести прямую.
Но я лучше в очередной раз напрягу Эксель:



Легко усмотреть, что данная прямая однозначно определяется красным и зелёным отрезками, отсюда и название – «уравнение прямой в отрезках».

Конечно, точки M_1, M_2 не так трудно найти и из уравнения $5x-7y+11=0$, но задача всё равно полезная. Рассмотренный алгоритм потребуется для нахождения **точек пересечения плоскости с координатными осями**, для **приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду** и в некоторых других задачах. Поэтому пара прямых для самостоятельного решения:

Пример 12

Составить уравнение прямой в отрезках и определить точки её пересечения с координатными осями.

а) $3x+2y-4=0$

б) $y=\frac{x}{2}+8$

Решения и ответы в конце урока. Не забывайте, что при желании всё можно начертить.

Как составить параметрические уравнениЯ прямой?

Параметрические уравнения прямой больше актуальны для **прямых в пространстве**, но без них наш конспект осиротеет.

Если известна некоторая точка $M(x_0;y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\vec{p}(p_1;p_2)$ этой прямой, то параметрические уравнения данной прямой задаются системой:

$$\begin{cases} x=p_1t+x_0 \\ y=p_2t+y_0 \end{cases}$$

Что такое функция, заданная параметрически, я уже объяснял в статье **Производная неявной и параметрически заданной функций**. Но всё равно немного повторюсь в следующей демонстрационной задаче:

Пример 13

Составить параметрические уравнения прямой по точке $M(4;-3)$ и направляющему вектору $\bar{p}(-2;1)$

Решение закончилось, не успев начаться:
$$\begin{cases} x = p_1t + x_0 \\ y = p_2t + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = t - 3 \end{cases}$$

Параметр «тэ» может принимать любые значения от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности», и каждому значению параметра соответствует конкретная точка плоскости. Например, если $t = 3$, то получаем точку $\begin{cases} x = -2 \cdot 3 + 4 \\ y = 3 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Обратная задача: как проверить, будет ли точка $M(4;-3)$ условия принадлежать данной прямой?

Подставим координаты точки $M(4;-3)$ в полученные параметрические уравнения:
$$\begin{cases} 4 = -2t + 4 \\ -3 = t - 3 \end{cases}$$

Из обоих уравнений следует, что $t = 0$, то есть, система совместна и имеет единственное решение.

Рассмотрим более содержательные задания:

<u>Пример 14</u>

Составить параметрические уравнения прямой $2x + y - 5 = 0$

Решение: По условию прямая задана в общем виде. Для того чтобы составить параметрические уравнения прямой, нужно знать её направляющий вектор и какую-нибудь точку, принадлежащую данной прямой.

Найдём направляющий вектор: $\bar{p}(-B, A) = \bar{p}(-1; 2)$

Теперь нужно найти какую-нибудь точку, принадлежащую прямой (подойдёт любая), в этих целях общее уравнение удобно переписать в виде уравнения с угловым коэффициентом: $y = -2x + 5$

Напрашивается, конечно, точка $M(0;5)$

Составим параметрические уравнения прямой:
$$\begin{cases} x = p_1t + x_0 \\ y = p_2t + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t + 5 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -t \\ y = 2t + 5 \end{cases}$

И напоследок небольшая творческая задача для самостоятельного решения.

<u>Пример 15</u>

Составить параметрические уравнения прямой, если известна принадлежащая ей точка $A\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ и вектор нормали $\bar{n}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$

Задачу можно оформить не единственным способом. Одна из версий решения и ответ в конце урока.

Существуют другие, более экзотические способы задать прямую, но то, что уже рассмотрено, хватит за глаза и за уши. Следующая статья, которую я рекомендую, называется **Простейшие задачи с прямой на плоскости**. В ней рассматриваются вещи, которые позволят окончательно укрепить ваш геометрический фундамент.

Желаю успехов!

Решения и ответы:

Пример 2: ***Решение****: Найдём угловой коэффициент:*

$k = tg\alpha = tg\frac{3\pi}{4} = -1$

Уравнение прямой составим по точке $K(-2; 1)$ *и угловому коэффициенту* $k = -1$*:*

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$y - 1 = -(x - (-2))$

$y - 1 = -(x + 2)$

$y - 1 = -x - 2$

$y = -x - 1$

Ответ*:* $y = -x - 1$

Пример 4: ***Решение****: Уравнение прямой составим по формуле:*

$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$

$\frac{x - 0}{-7} = \frac{y - (-3)}{5}$

$5x = -7(y + 3)$

$5x = -7y - 21$

$5x + 7y + 21 = 0$

Ответ*:* $5x + 7y + 21 = 0$

Пример 6: ***Решение****: Используем формулу:*

$p_2 \cdot (x - x_0) = p_1 \cdot (y - y_0)$

$1 \cdot (x - 0) = 0 \cdot (y - 3)$

$x = 0$

Ответ*:* $x = 0$ *(ось ординат)*

Пример 8: ***Решение****: Составим уравнение прямой по двум точкам:*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-8}{3-8}=\frac{y-2}{\frac{3}{4}-2}$$

$$\frac{x-8}{-5}=\frac{y-2}{-\frac{5}{4}}$$

$$-\frac{5}{4}\cdot(x-8)=-5\cdot(y-2)$$

Умножаем обе части на –4:

$$5\cdot(x-8)=20\cdot(y-2)$$

И делим на 5:

$$x-8=4\cdot(y-2)$$

$$x-8=4y-8$$