http://mathprofi.ru/linii_vtorogo_poryadka_ellips_i_okruzhnost.html

Линии второго порядка. Эллипс и его каноническое уравнение. Окружность

После основательной проработки **прямых на плоскости** продолжаем изучать геометрию двухмерного мира. Ставки удваиваются, и я приглашаю вас посетить живописную галерею эллипсов, гипербол, парабол, которые являются типичными представителями *линий второго порядка*. Экскурсия уже началась, и сначала краткая информация обо всей экспозиции на разных этажах музея:

Понятие алгебраической линии и её порядка

Линию на плоскости называют *алгебраической*, если в **аффинной системе координат** её уравнение имеет вид $F(x;y)=0$, где $F(x;y)$ – многочлен, состоящий из слагаемых вида $kx^m y^n$ (k – действительное число, m, n – целые неотрицательные числа).

Как видите, уравнение алгебраической линии не содержит синусов, косинусов, логарифмов и прочего функционального бомонда. Только «иксы» и «игреки» в целых неотрицательных степенях.

Далее под словом «линия» по умолчанию будет подразумеваться алгебраическая линия на плоскости

Порядок линии равен максимальному значению $m+n$ входящих в него слагаемых.

По соответствующей теореме, понятие алгебраической линии, а также её порядок не зависят от выбора **аффинной системы координат**, поэтому для лёгкости бытия считаем, что все последующие выкладки имеют место быть в **декартовых координатах** $(O,\bar{i},\bar{j})$.

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где A, B, C, D, E, F – произвольные действительные числа (B, D, E *принято записывать с множителем-«двойкой»*), причём коэффициенты A, B, C не равны одновременно нулю.

Если $A=B=C=0$, то уравнение упрощается до $2Dx+2Ey+F=0$, и если коэффициенты D, E одновременно не равны нулю, то это в точности **общее уравнение «плоской» прямой**, которая представляет собой *линию первого порядка*.

Многие поняли смысл новых терминов, но, тем не менее, в целях 100%-го усвоения материала сунем пальцы в розетку. Чтобы определить порядок линии, нужно перебрать все слагаемые её уравнения и у каждого из них найти сумму степеней входящих переменных.

Например:

слагаемое $2Dx$ содержит «икс» в 1-й степени;
слагаемое $2Ey$ содержит «игрек» в 1-й степени;
в слагаемом F переменные отсутствуют, поэтому сумма их степеней равна нулю.

Далее из полученных чисел выбирается максимальное значение, в данном случае единица, – это и есть порядок линии.

Теперь разберёмся, почему уравнение $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ задаёт линию **второго** порядка:

слагаемое Ax^2 содержит «икс» во 2-й степени;
у слагаемого $2Bx^1y^1$ сумма степеней переменных: 1 + 1 = 2;
слагаемое Cy^2 содержит «игрек» во 2-й степени;
все остальные слагаемые – *меньшей* степени.

Максимальное значение: 2

Если к нашему уравнению дополнительно приплюсовать, скажем, x^2y, то оно уже будет определять *линию третьего порядка*. Очевидно, что общий вид уравнения линии 3-го порядка содержит «полный комплект» слагаемых, сумма степеней переменных в которых равна трём:
$Kx^3+Lx^2y+Mxy^2+Ny^3+Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где коэффициенты K, L, M, N не равны одновременно нулю.

В том случае, если добавить одно или несколько подходящих слагаемых, которые содержат $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4$, то речь уже зайдёт о *линии 4-го порядка*, и т.д.

С алгебраическими линиями 3-го, 4-го и более высоких порядков нам придется столкнуться ещё не раз, в частности, при знакомстве с **полярной системой координат**.

Однако вернёмся к общему уравнению $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ и вспомним его простейшие школьные вариации. В качестве примеров напрашивается парабола $y=x^2$, уравнение которой легко привести к общему виду $x^2-y=0$, и гипербола $y=\frac{1}{x}$ с эквивалентным уравнением $xy-1=0$. Однако не всё так гладко….

Существенный недостаток общего уравнения состоит в том, что почти всегда не понятно, какую линию оно задаёт. Даже в простейшем случае $xy-1=0$ не сразу сообразишь, что это гипербола. Такие расклады хороши только на маскараде, поэтому в курсе аналитической геометрии рассматривается типовая задача **приведения уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду**.

Что такое канонический вид уравнения?

Это общепринятый стандартный вид уравнения, когда в считанные секунды становится ясно, какой геометрический объект оно определяет. Кроме того, канонический вид очень удобен для решения многих практических заданий.

Так, например, по каноническому уравнению $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$ «плоской» прямой, во-первых, сразу понятно, что это прямая, а во-вторых – элементарно просматривается принадлежащая ей точка $M(x_0;y_0)$ и направляющий вектор $\vec{p}(p_1;p_2)$.

Очевидно, что любая *линия 1-го порядка* представляет собой прямую. На втором же этаже нас ждёт уже не вахтёр, а гораздо более разнообразная компания из девяти статуй:

Классификация линий второго порядка

С помощью специального комплекса действий любое уравнение линии второго порядка приводится к одному из следующих видов:

(a и b – положительные действительные числа)

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$ – каноническое уравнение эллипса;

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение гиперболы;

3) $y^2=2px \quad (p>0)$ – каноническое уравнение параболы;

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – **мнимый** эллипс;

5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара пересекающихся прямых;

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара **мнимых** пересекающихся прямых (с единственной действительной точкой пересечения в начале координат);

7) $y^2-a^2=0$ – пара параллельных прямых;

8) $y^2+a^2=0$ – пара **мнимых** параллельных прямых;

9) $y^2=0$ – пара совпавших прямых.

У ряда читателей может сложиться впечатление неполноты списка. Например, в пункте № 7 уравнение $y^2-a^2=0$ задаёт пару **прямых** $y=-a,\, y=a$, параллельных оси OX, и возникает вопрос: а где же уравнение $x^2-a^2=0$, определяющее прямые $x=-a,\, x=a$, параллельные оси ординат? Ответ: оно **не считается каноническим**. Прямые $x=-a,\, x=a$ представляют собой тот же самый стандартный случай $y=-a,\, y=a$, повёрнутый на 90 градусов, и дополнительная запись $x^2-a^2=0$ в классификации избыточна, поскольку не несёт ничего принципиально нового.

Таким образом, существует девять и только девять различных видов линий 2-го порядка, но на практике наиболее часто встречаются **эллипс,** **гипербола и парабола**.

Сначала рассмотрим эллипс. Как обычно, я акцентирую внимание на тех моментах, которые имеют большое значение для решения задач, и если вам необходим подробный вывод формул, доказательства теорем, пожалуйста, обратитесь, например, к учебнику Базылева/Атанасяна либо Александрова.

Эллипс и его каноническое уравнение

Правописание… пожалуйста, не повторяйте ошибок некоторых пользователей Яндекса, которых интересует «как построить эллибз», «отличие элипса от овала» и «эксцентриситет элебса».

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где a, b – положительные действительные числа, причём $a > b$. Само определение эллипса я сформулирую позже, а пока самое время отдохнуть от говорильни и решить распространённую задачу:

Как построить эллипс?

Да, вот взять его и просто начертить. Задание встречается часто, и значительная часть студентов не совсем грамотно справляются с чертежом:

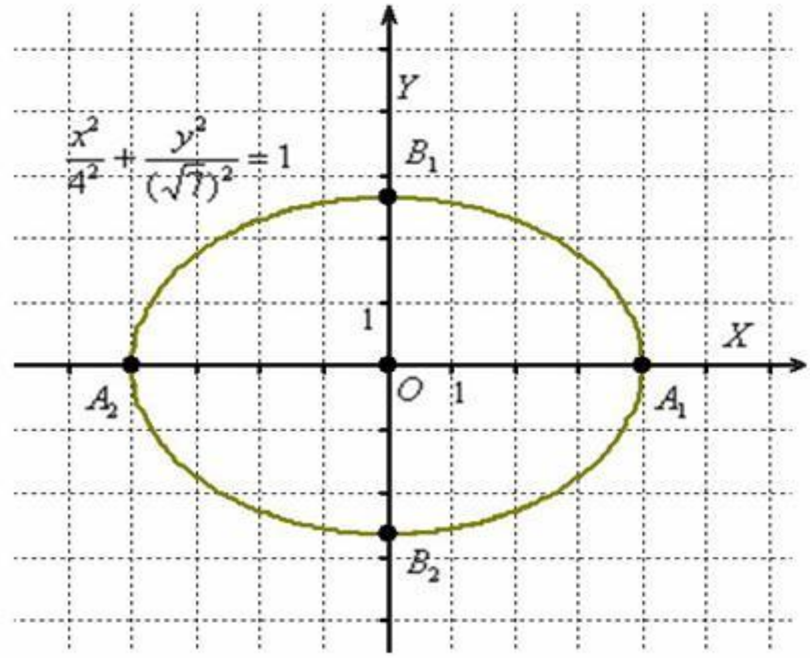
Пример 1

Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

Решение: сначала приведём уравнение к каноническому виду:
$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$

Зачем приводить? Одно из преимуществ канонического уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ заключается в том, что оно позволяет моментально определить **вершины эллипса**, которые находятся в точках $A_1(a;0),\ A_2(-a;0),\ B_1(0;b),\ B_2(0;-b)$. Легко заметить, что координаты каждой из этих точек удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

В данном случае $A_1(4;0), A_2(-4;0), B_1(0;\sqrt{7}), B_2(0;-\sqrt{7})$:



Отрезок A_1A_2 называют **большой осью** эллипса;

отрезок B_1B_2 – **малой осью**;

число $a=|OA_1|=|OA_2|$ называют **большой полуосью** эллипса;

число $b=|OB_1|=|OB_2|$ – **малой полуосью**.

в нашем примере: $a=4, b=\sqrt{7}$.

Чтобы быстро представить, как выглядит тот или иной эллипс достаточно посмотреть на значения «а» и «бэ» его канонического уравнения.

Всё ладно, складно и красиво, но есть один нюанс: я выполнил чертёж **с помощью программы**. И вы можете выполнить чертёж с помощью какого-либо приложения. Однако в суровой действительности на столе лежит клетчатый листок бумаги, и на наших руках водят хороводы мыши. Люди с художественным талантом, конечно, могут поспорить, но мыши есть и у вас тоже (правда, поменьше). Таки не зря человечество изобрело линейку, циркуль, транспортир и другие нехитрые приспособления для черчения.

По этой причине нам вряд ли удастся аккуратно начертить эллипс, зная одни вершины. Ещё куда ни шло, если эллипс небольшой, например, с полуосями $a=2, b=1$. Как вариант, можно уменьшить масштаб и, соответственно, размеры чертежа. Но в общем случае крайне желательно найти дополнительные точки.

Существует два подхода к построению эллипса – геометрический и алгебраический. Построение с помощью циркуля и линейки мне не нравится по причине не самого короткого алгоритма и существенной загромождённости чертежа. В случае крайней необходимости, пожалуйста, обратитесь к учебнику, а в реальности же гораздо рациональнее воспользоваться средствами алгебры. Из уравнения эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ на черновике быстренько выражаем:

$$\frac{y^2}{7}=1-\frac{x^2}{16}$$

$$y^2=7\cdot\frac{(16-x^2)}{16}$$

Далее уравнение распадается на две функции:

$y=\sqrt{\frac{7}{16}\cdot(16-x^2)}=\frac{1}{4}\sqrt{7\cdot(16-x^2)}$ – определяет верхнюю дугу эллипса;

$y=-\sqrt{\frac{7}{16}\cdot(16-x^2)}=-\frac{1}{4}\sqrt{7\cdot(16-x^2)}$ – определяет нижнюю дугу эллипса.

Заданный каноническим уравнением эллипс симметричен относительно координатных осей, а также относительно начала координат. И это отлично – симметрия почти всегда предвестник халявы. Очевидно, что достаточно разобраться с 1-й координатной четвертью, поэтому нам потребуется функция $y=\frac{1}{4}\sqrt{7\cdot(16-x^2)}$. Напрашивается нахождение дополнительных точек с абсциссами $x=1,\ x=2,\ x=3$. Настукаем три смс-ки на калькуляторе:

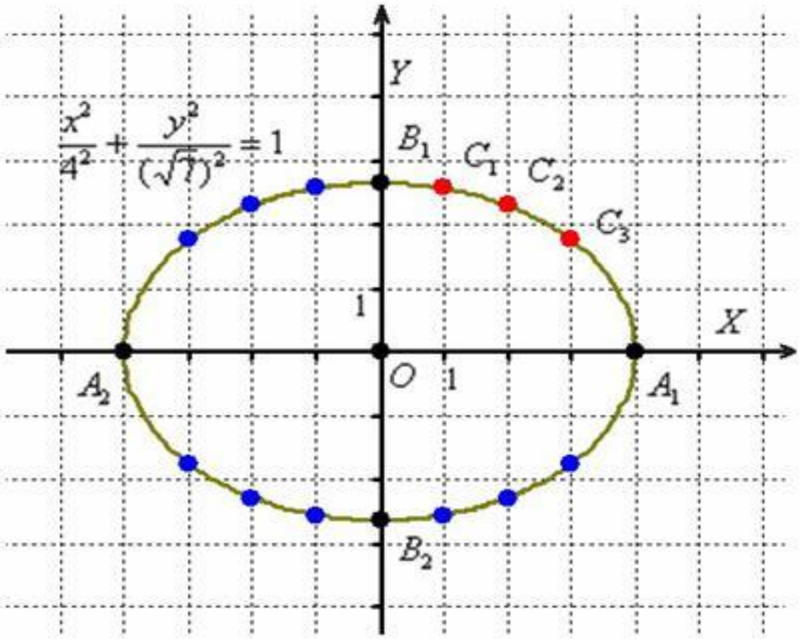
$$C_1: x=1\Rightarrow y=\frac{1}{4}\sqrt{7\cdot(16-1^2)}=\frac{\sqrt{105}}{4}\approx 2{,}56;$$

$$C_2: x=2\Rightarrow y=\frac{1}{4}\sqrt{7\cdot(16-2^2)}=\frac{\sqrt{84}}{4}\approx 2{,}29;$$

$$C_3: x=3\Rightarrow y=\frac{1}{4}\sqrt{7\cdot(16-3^2)}=\frac{7}{4}=1{,}75.$$

Безусловно, приятно и то, что если допущена серьёзная ошибка в вычислениях, то это сразу выяснится в ходе построения.

Отметим на чертеже точки C_1, C_2, C_3 (красный цвет), симметричные точки на остальных дугах (синий цвет) и аккуратно соединим линией всю компанию:



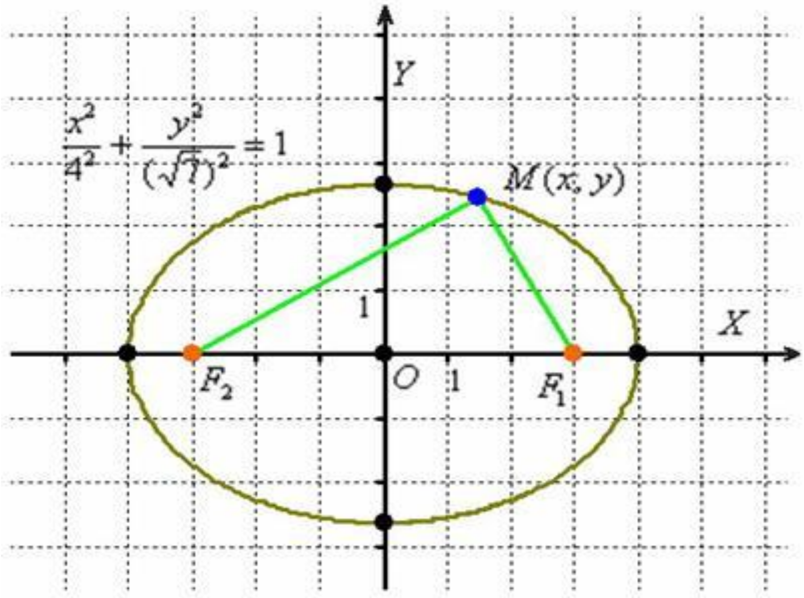
Первоначальный набросок лучше прочертить тонко-тонко, и только потом придать нажим карандашу. В результате должен получиться вполне достойный эллипс. Кстати, не желаете ли узнать, что это за кривая?

Определение эллипса. Фокусы эллипса и эксцентриситет эллипса

Эллипс – это частный случай овала. Слово «овал» не следует понимать в обывательском смысле («ребёнок нарисовал овал» и т.п.). Это математический термин, имеющий развёрнутую формулировку. Целью данного урока не является рассмотрение теории овалов и различных их видов, которым практически не уделяется внимания в стандартном курсе аналитической геометрии. И, в соответствии с более актуальными потребностями, мы сразу переходим к строгому определению эллипса:

Эллипс – это множество всех точек плоскости, сумма расстояний до каждой из которых от двух данных точек F_1, F_2, называемых **фокусами** эллипса, – есть величина постоянная, численно равная длине большой оси этого эллипса: $2a$. При этом расстояния между фокусами меньше данного значения: $|F_1F_2| < 2a$.

Сейчас станет всё понятнее:



Представьте, что синяя точка «ездит» по эллипсу. Так вот, какую бы точку эллипса $M(x;y)$ мы ни взяли, сумма длин отрезков F_1M, F_2M всегда будет одной и той же:

$|F_1M|+|F_2M|=2a=const$

Убедимся, что в нашем примере значение суммы $|F_1M|+|F_2M|$ действительно равно восьми. Мысленно поместите точку «эм» в правую вершину эллипса, тогда: $|F_1M|+|F_2M|=1+7=8=2a$, что и требовалось проверить.

На определении эллипса основан ещё один способ его вычерчивания. Высшая математика, порой, причина напряжения и стресса, поэтому самое время провести очередной сеанс разгрузки. Пожалуйста, возьмите ватман либо большой лист картона и приколотите его к столу двумя гвоздиками. Это будут фокусы F_1, F_2. К торчащим шляпкам гвоздей привяжите зелёную нитку и до упора оттяните её карандашом. Гриф карандаша окажется в некоторой точке M, которая принадлежит эллипсу. Теперь начинайте вести карандаш по листу бумаги, сохраняя зелёную нить сильно натянутой. Продолжайте процесс до тех пор, пока не вернётесь в исходную точку… отлично… чертёж можно сдать на проверку ~~врачу~~ преподавателю =)

Как найти фокусы эллипса?

В приведённом примере я изобразил «готовенькие» точки фокуса, и сейчас мы научимся добывать их из недр геометрии.

Если эллипс задан каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то его фокусы имеют координаты $F_1(c;0), F_2(-c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$ – это **расстояние от каждого из фокусов до центра симметрии эллипса**.

Вычисления проще пареной репы:

$c = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3$

$F_1(3; 0), F_2(-3; 0)$

! Со значением «цэ» нельзя отождествлять конкретные координаты фокусов! Повторюсь, что $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – это РАССТОЯНИЕ от каждого из фокусов до центра (который в общем случае не обязан располагаться именно в начале координат).

И, следовательно, расстояние между фокусами $|F_1F_2| = 2c$ тоже нельзя привязывать к каноническому положению эллипса. Иными словами, эллипс можно перенести в другое место и значение $2c$ останется неизменным, в то время как фокусы, естественно, поменяют свои координаты. Пожалуйста, учитывайте данный момент в ходе дальнейшего изучения темы.

Едем дальше:

Эксцентриситет эллипса и его геометрический смысл

Эксцентриситетом эллипса называют отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$, которое может принимать значения в пределах $0 \le \varepsilon < 1$.

В нашем случае: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$

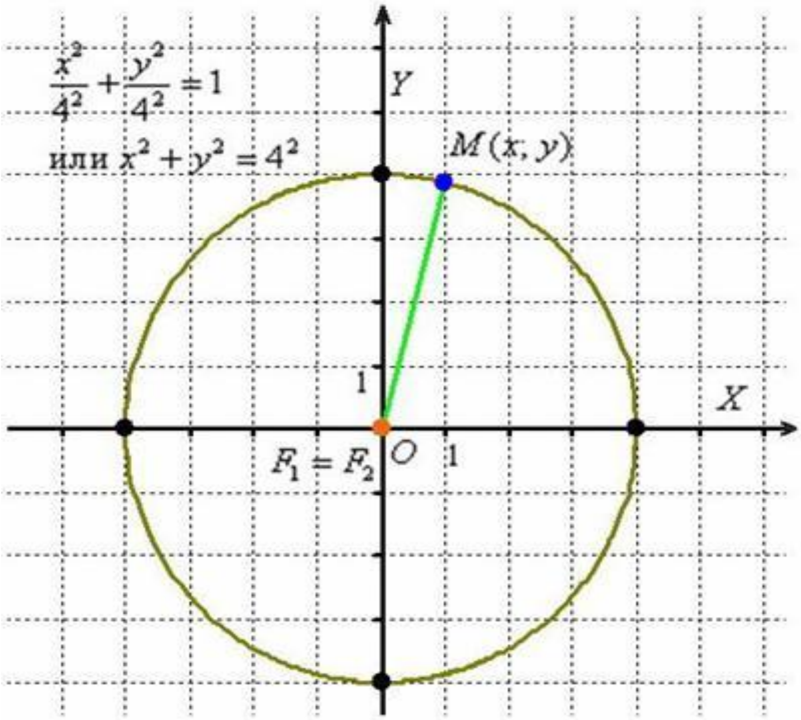
Выясним, как форма эллипса зависит от его эксцентриситета. Для этого **зафиксируем левую и правую вершины** рассматриваемого эллипса, то есть, значение большой полуоси $a = 4$ будет оставаться постоянным. Тогда формула эксцентриситета примет вид: $\varepsilon = \frac{c}{4}$.

Начнём приближать значение эксцентриситета к единице. Это возможно только в том случае, если $c \to 4$. Что это значит? …вспоминаем про фокусы $F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$. Это значит, что фокусы эллипса будут «разъезжаться» по оси абсцисс к боковым вершинам. И, поскольку «зелёные отрезки не резиновые», то эллипс неизбежно начнёт сплющиваться, превращаясь всё в более и более тонкую сосиску, нанизанную на ось OX.

Таким образом, **чем ближе значение эксцентриситета эллипса к единице, тем эллипс более продолговат**.

Теперь смоделируем противоположный процесс: фокусы эллипса $F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$ пошли навстречу друг другу, приближаясь к центру. Это означает, что значение «цэ» становится всё меньше и, соответственно, эксцентриситет стремится к нулю: $\varepsilon = \frac{c}{4} \to 0$.
При этом «зелёным отрезкам» будет, наоборот – «становиться тесно» и они начнут «выталкивать» линию эллипса вверх и вниз.

Таким образом, **чем ближе значение эксцентриситета к нулю, тем эллипс больше похож на**… смотрим предельный случай $c = 0$, когда фокусы успешно воссоединились в начале координат:



Окружность – это частный случай эллипса

Действительно, в случае равенства полуосей каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ принимает вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, который рефлекторно преобразуется к $x^2 + y^2 = a^2$ – хорошо известному из школы уравнению окружности с центром в начале координат радиуса «а».

На практике чаще используют запись с «говорящей» буквой «эр»: $x^2 + y^2 = r^2$. Радиусом называют длину отрезка $r = |OM|$, при этом каждая точка $M(x; y)$ окружности удалена от центра O на расстояние радиуса.

Заметьте, что определение эллипса остаётся полностью корректным: фокусы совпали $F_1 = F_2$, и сумма длин совпавших отрезков $|F_1M| + |F_2M|$ для каждой точки окружности – есть величина постоянная. Так как расстояние между фокусами $2c = 0$, то **эксцентриситет** $\varepsilon = \frac{c}{a}$ **любой окружности равен нулю**.

Строится окружность легко и быстро, достаточно вооружиться циркулем. Тем не менее, иногда бывает нужно выяснить координаты некоторых её точек, в этом случае идём знакомым путём – приводим уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ к бодрому матановскому виду:

$y^2 = r^2 - x^2$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ – функция верхней полуокружности;

$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ – функция нижней полуокружности.

После чего находим нужные значения, **дифференцируем**, **интегрируем** и делаем другие хорошие вещи.

Статья, конечно, носит справочный характер, но как на свете без любви прожить? Творческое задание для самостоятельного решения

Пример 2

Составить каноническое уравнение эллипса, если известен один из его фокусов $F_2(-2;0)$ и малая полуось $b=2$ (центр находится в начале координат). Найти вершины, дополнительные точки и изобразить линию на чертеже. Вычислить эксцентриситет.

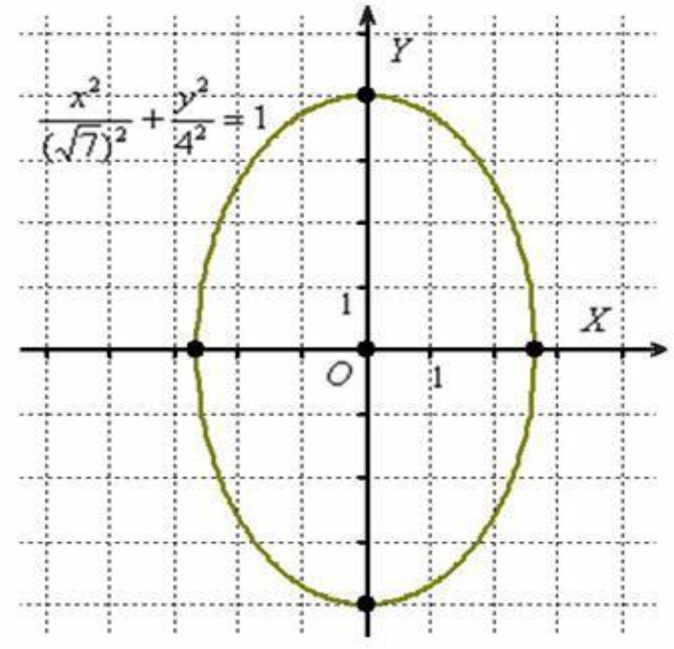
Решение и чертёж в конце урока

Добавим экшена:

Поворот и параллельный перенос эллипса

Вернёмся к каноническому уравнению эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а именно, к условию $a>b$, загадка которого терзает пытливые умы ещё со времён первого упоминания о данной кривой. Вот мы рассмотрели эллипс $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$, но разве на практике не может встретиться уравнение $\frac{x^2}{(\sqrt{7})^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$? Ведь здесь $\sqrt{7}<4$, однако, это вроде бы как тоже эллипс!

Подобное уравнение нечасто, но действительно попадается. И оно действительно определяет эллипс. Развеем мистику:



В результате построения получен наш родной эллипс, повёрнутый на 90 градусов. То есть, $\frac{x^2}{(\sqrt{7})^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ – это **неканоническая запись** эллипса $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$. **Запись!** – уравнение $\frac{x^2}{(\sqrt{7})^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ не задаёт какой-то другой эллипс, поскольку на оси OX не существует точек F_1, F_2 (фокусов), которые бы удовлетворяли определению эллипса.

Как быть, если такое чудо-яйцо всё-таки встретилось на жизненном пути? В том случае если вам предложено **построить** эллипс, то, наверное, лучше построить его в нестандартном виде. С вершинами и дополнительными точками, думаю, трудностей не возникнет. Но если вам предложено найти фокусы, эксцентриситет и т.д., то **настоятельно рекомендую** начать (или продолжить после чертежа) решение так:

«Повернём эллипс на 90 градусов и перепишем его уравнение $\frac{x^2}{(\sqrt{7})^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ в каноническом виде: $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$» – дальше по обычной схеме.

***! Примечание**: в теории принято поворачивать не саму фигуру, а оси! И если от вас требуется именно **ПРИВЕСТИ уравнение к каноническому виду**, то решение, строго говоря, следует оформить иначе: «Перейдём к новой прямоугольной системе координат $O\tilde{X}\tilde{Y}$, повернув координатные оси на 90 градусов против часовой стрелки, и запишем уравнение эллипса в каноническом виде: $\frac{\tilde{x}^2}{4^2}+\frac{\tilde{y}^2}{(\sqrt{7})^2}=1$».*

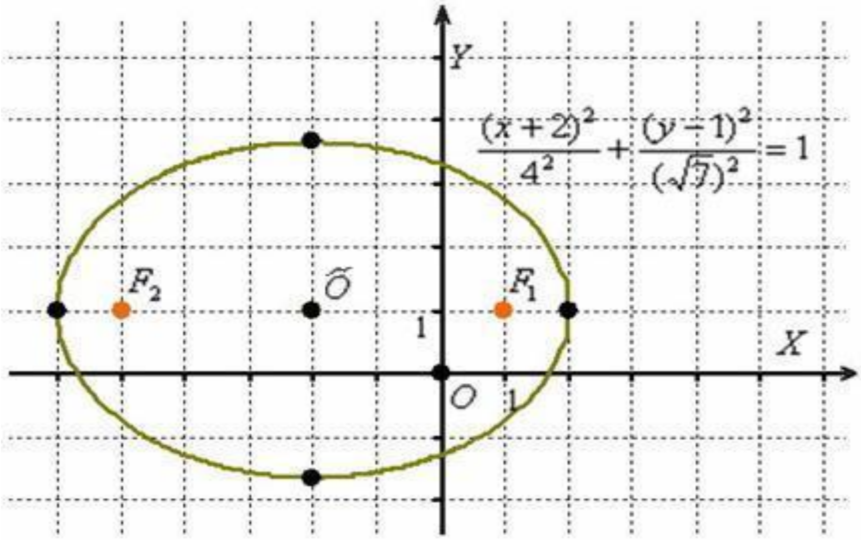
Впрочем, эрудиты могут встать на скользкую дорожку путаницы, модифицировав все расчёты с учётом поворота. Но всё равно не советую.

Потому что ребячество. Ведь эллипс можно повернуть и на другой угол =) Об этом мы ещё поговорим позже.

В практических задачах гораздо чаще встречается **параллельный перенос** эллипса:

Уравнение $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ задаёт эллипс с большой полуосью «а», малой полуосью «бэ» и центром симметрии в точке $\widetilde{O}(x_0;\,y_0)$.

Изобразим на чертеже эллипс $\frac{(x+2)^2}{4^2}+\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{7})^2}=1$. Согласно формуле: $x_0=-2,\,y_0=1$, то есть наш подопытный эллипс «переехал» в точку $\widetilde{O}(-2;\,1)$:



Значения $a=4,\,b=\sqrt{7},\,c=3$ остались прежними, а вот фокусы, разумеется, мигрировали, и формулы их координат нужно модифицировать поправками на соответствующие сдвиги:

$F_1(c+x_0;\,y_0),\ F_2(-c+x_0;\,y_0)$

$\Downarrow$

$F_1(c-2;\,1),\ F_2(-c-2;\,1)$

$\Downarrow$

$F_1(3-2;\,1),\ F_2(-3-2;\,1)$

$\Downarrow$

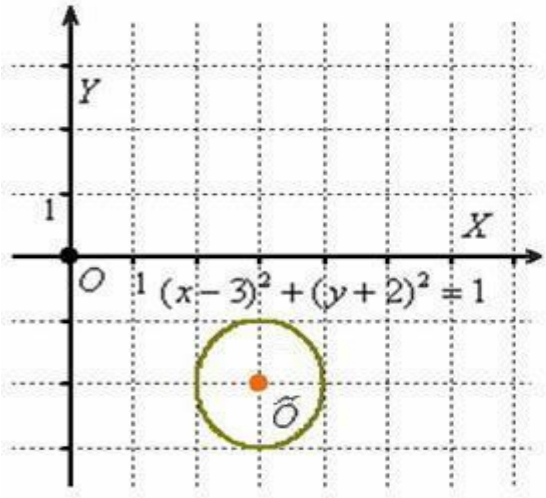
$F_1(1;\,1),\ F_2(-5;\,1)$

Здесь всё обходится значительно проще, чем при повороте, и если по условию <u>не нужно</u> приводить уравнение к каноническому виду, то лично я предпочту оставить его в виде $\frac{(x+2)^2}{4^2}+\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{7})^2}=1$. Что делать, если нужно приводить? «Чайникам» в большинстве случаев простят фразу: «Осуществим параллельный перенос эллипса в начало координат и перепишем уравнение $\frac{(x+2)^2}{4^2}+\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{7})^2}=1$ в каноническом виде: $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$ ». Но академический подход предполагает параллельный перенос **не самой фигуры, а системы координат**! Поэтому людям, изучающим высшую математику по профилю и/или углублённо, гораздо лучше завернуть примерно следующее: «С помощью параллельного переноса исходной системы координат перейдём к новой прямоугольной системе координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ с началом в точке $\tilde{O}(-2;1)$ и запишем уравнение эллипса в каноническом виде $\frac{\tilde{x}^2}{4^2}+\frac{\tilde{y}^2}{(\sqrt{7})^2}=1$ ».

На самом деле упрощенная версия формулы нам знакома ещё со школьных времён:

Уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ задаёт окружность радиуса r с центром в точке $\tilde{O}(x_0;y_0)$.

Освежая ностальгические воспоминания, изобразим на чертеже окружность, заданную уравнением $(x-3)^2+(y+2)^2=1$:



В исследовательских целях приведём наше уравнение к общему виду, выполнив возведение в квадрат и приведение подобных слагаемых:

$(x-3)^2+(y+2)^2=1$

$x^2-6x+9+y^2+4y+4=1$

$x^2-6x+y^2+4y+12=0$ – как правило, в таком обличье оно и встречается в природе.

Таким образом, в практических задачах часто предварительно нужно выполнить обратное действие – **выделить полные квадраты**. Данный приём подробно разобран на уроках о **геометрических преобразованиях графиков** и **интегрировании дробей**. Хотя следующий простой пример не должен вызвать у вас затруднений даже без отработки данного метода:

Пример 3

Построить график линии, заданной уравнением $x^2-2y+y^2-3=0$

Решение и чертёж в конце урока.

На практике эллипс (как и другие линии) может быть одновременно повёрнут на любой угол относительно своего канонического положения и перенесен в любую точку, отличную от начала координат. В таком случае решается типовая задача **приведения линии 2-го порядка к каноническому виду**, к которой я потихоньку начал вас готовить уже сегодня.

Ну а пока самое время перейти ко второй части лекции, где жертвами станут **гипербола и парабола**.

Решения и ответы:

Пример 2: ***Решение****: поскольку фокусы канонически расположенного эллипса имеют координаты* $F_1(c;\,0),\ F_2(-c;\,0)$ *, то расстояние от каждого из фокусов до начала координат равно:* $c=2$.

По условию известно значение $b=2$*, из соотношения* $c=\sqrt{a^2-b^2}$ *находим:*

$$2=\sqrt{a^2-2^2}$$

$$2^2=a^2-4$$

$$a^2=4+4=8\Rightarrow a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx 2{,}83$$

Запишем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

Вершины эллипса расположены в точках $A_1(2\sqrt{2};\,0),\ A_2(-2\sqrt{2};\,0),\ B_1(0;\,2),\ B_2(0;-2)$.

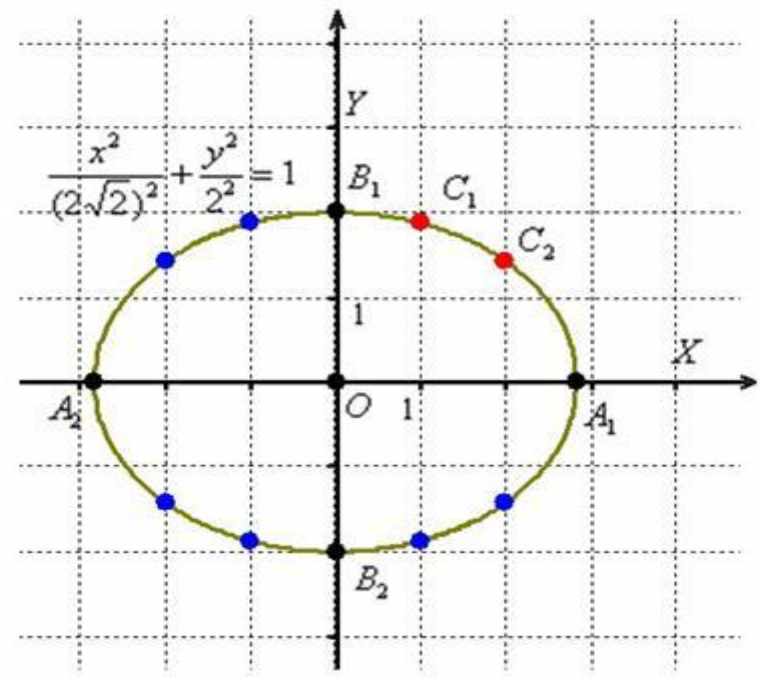
Найдём дополнительные точки:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow\frac{y^2}{4}=1-\frac{x^2}{8}\Rightarrow y^2=4\cdot\frac{8-x^2}{8}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{8-x^2}{2}}$$

$$C_1:\ x=1\Rightarrow y=\sqrt{\frac{8-1^2}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}\approx 1{,}87;$$

$$C_2:\ x=2\Rightarrow y=\sqrt{\frac{8-2^2}{2}}=\sqrt{2}\approx 1{,}41.$$

Выполним чертёж:



Вычислим эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Пример 3: ***Решение****: выделим полный квадрат:*

$x^2 - 2y + y^2 - 3 = 0$

$x^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 - 3 = 0$

$x^2 + (y-1)^2 = 4$

$x^2 + (y-1)^2 = 2^2$ *– окружность радиуса* $r = 2$ *с центром в точке* $\tilde{O}(0;1)$*.*

Выполним чертёж: