

Гипербола и парабола

Переходим ко второй части статьи [о линиях второго порядка](#), посвященной двум другим распространённым кривым – **гиперболе** и **параболе**. Если вы зашли на данную страницу с поисковика либо ещё не успели сориентироваться в теме, то рекомендую сначала изучить первый раздел урока, на котором мы рассмотрели не только основные теоретические моменты, но и познакомились с [эллипсом](#). Остальным же читателям предлагаю существенно пополнить свои школьные знания о параболе и гиперболе. Гипербола и парабола – это просто? ...Не дождётеся =)

Гипербола и её каноническое уравнение

Общая структура изложения материала будет напоминать предыдущий параграф. Начнём с общего понятия гиперболы и задачи на её построение.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a, b – положительные действительные числа. Обратите внимание, что в отличие от [эллипса](#), здесь не накладывается условие $a > b$, то есть, значение «а» может быть и меньше значения «б».

Надо сказать, довольно неожиданно... уравнение «школьной»

гиперболы $y = \frac{1}{x}$ и близко не напоминает каноническую запись. Но эта загадка нас ещё подождёт, а пока почешем затылок и вспомним, какими характерными особенностями обладает рассматриваемая кривая? Раскинем на экране своего

воображения [график функции](#) $y = \frac{1}{x}$

У гиперболы две симметричные ветви.

У гиперболы две [асимптоты](#).

Неплохой прогресс! Данными свойствами обладает любая гипербола, и сейчас мы с неподдельным восхищением заглянем в декольте этой линии:

Пример 4

Построить гиперболу, заданную уравнением $5x^2 - 4y^2 = 20$

Решение: на первом шаге приведём данное уравнение к каноническому

виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Пожалуйста, запомните типовой порядок действий. Справа необходимо получить «единицу», поэтому обе части исходного уравнения

делим на 20:

$$\frac{5x^2 - 4y^2}{20} = \frac{20}{20}$$

$$\frac{5x^2}{20} - \frac{4y^2}{20} = 1$$

Здесь можно сократить обе дроби, но оптимальнее сделать каждую из них трёхэтажной:

$$\frac{\frac{x^2}{20}}{\frac{5}{1}} - \frac{\frac{y^2}{20}}{\frac{4}{1}} = 1$$

И только после этого провести сокращение:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

Выделяем квадраты в знаменателях:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$

Готово.

Почему преобразования лучше проводить именно так? Ведь дроби левой

части $\frac{5x^2}{20} - \frac{4y^2}{20} = 1$ можно сразу сократить и получить $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. Дело в том, что в рассматриваемом примере немного повезло: число 20 делится и на 4 и на 5. В общем случае такой номер не проходит. Рассмотрим, например,

уравнение $\frac{3x^2}{20} - \frac{8y^2}{20} = 1$. Здесь с делимостью всё печальнее и без трёхэтажных дробей уже не обойтись:

$$\frac{\frac{x^2}{20}}{\frac{3}{1}} - \frac{\frac{y^2}{20}}{\frac{8}{1}} = 1$$

$$\frac{\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^2}}{\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^2} - \frac{\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} = 1$$

Итак, воспользуемся плодом наших трудов – каноническим

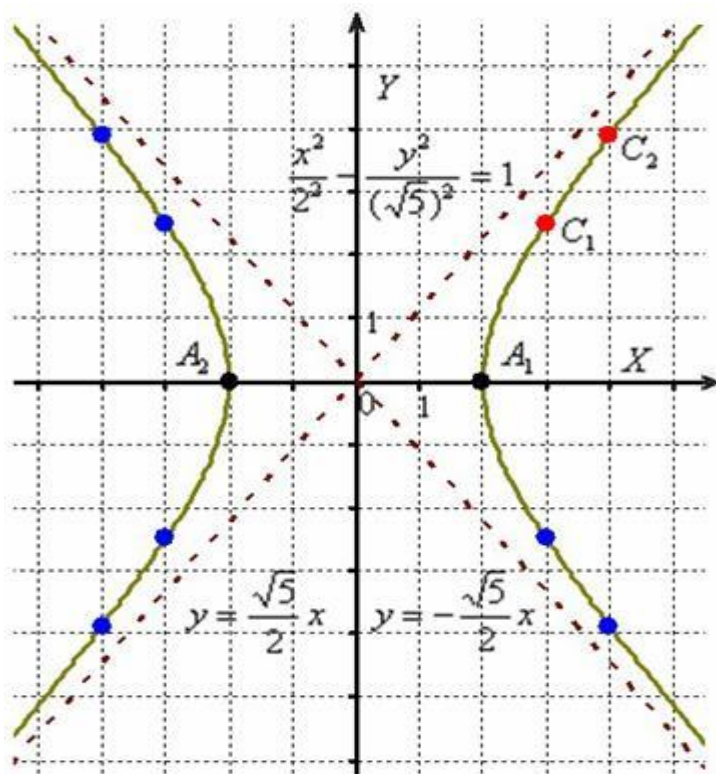
уравнением $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$:

Как построить гиперболу?

Существует два подхода к построению гиперболы – геометрический и алгебраический.

С практической точки зрения вычерчивание с помощью циркуля... я бы даже сказал утопично, поэтому гораздо выгоднее вновь привлечь на помощь нехитрые расчёты.

Целесообразно придерживаться следующего алгоритма, сначала готовый чертёж, потом комментарии:



1) Прежде всего, находим асимптоты. Если гипербола задана каноническим

уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то её асимптотами

являются прямые $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$. В нашем случае: $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$

. **Данный пункт обязателен!** Это принципиальная особенность чертежа, и будет грубой ошибкой, если ветви гиперболы «вылезут» за свои асимптоты.

2) Теперь находим **две вершины гиперболы**, которые расположены на оси абсцисс в точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Выводится элементарно: если $y = 0$, то

каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ превращается в $\frac{x^2}{a^2} = 1$, откуда и следует, что $x^2 = a^2 \Rightarrow x = a$, $x = -a$. Рассматриваемая гипербола имеет вершины $A_1(2, 0)$, $A_2(-2, 0)$

3) Ищем дополнительные точки. Обычно хватает двух-трёх. В каноническом положении гипербола симметрична относительно начала координат и обеих координатных осей, поэтому вычисления достаточно провести для 1-й координатной четверти. Методика точно такая же, как и при

построении эллипса. Из канонического уравнения $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ на черновике выражаем:

$$\frac{y^2}{5} = \frac{x^2}{4} - 1$$

$$y^2 = \frac{5}{4}(x^2 - 4)$$

Уравнение распадается на две функции:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{5(x^2 - 4)} \quad \text{— определяет верхние дуги гиперболы (то, что нам надо);}$$

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{5(x^2 - 4)} \quad \text{— определяет нижние дуги гиперболы.}$$

Напрашивается нахождение точек с абсциссами $x = 3, x = 4$:

$$C_1: x = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{5(3^2 - 4)} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5;$$

$$C_2: x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{5(4^2 - 4)} = \frac{\sqrt{60}}{2} \approx 3,87.$$

4) Изобразим на чертеже асимптоты $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x, \quad y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$,

вершины $A_1(2; 0), A_2(-2; 0)$, дополнительные C_1, C_2 и симметричные им точки в других координатных четвертях. Аккуратно соединим соответствующие точки у каждой ветви гиперболы:

Техническая трудность может возникнуть с иррациональным угловым

коэффициентом $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$, но это вполне преодолимая проблема.

Отрезок A_1A_2 называют **действительной осью** гиперболы,

его длину $|A_1A_2| = 2a$ — расстоянием между вершинами;

число $a = |OA_1| = |OA_2|$ называют **действительной полуосью** гиперболы;

число b — **мнимой полуосью**.

В нашем примере: $a = 2, b = \sqrt{5}, |A_1A_2| = 4$, и, очевидно, если данную гиперболу повернуть вокруг центра симметрии и/или переместить, то эти значения не изменятся.

Определение гиперболы. Фокусы и эксцентриситет

У гиперболы, точно так же, как и у **эллипса**, есть две особенные точки F_1, F_2 , которые называются **фокусами**. *Не говорю, но на всякий случай, вдруг кто неверно понимает: центр симметрии и точки фокуса, разумеется, не принадлежат кривым.*

Общая концепция определения тоже похожа:

Гиперболой называют множество всех точек плоскости, абсолютное значение разности расстояний до каждой из которых от двух данных

точек F_1, F_2 — есть величина постоянная, численно равная расстоянию между

вершинами этой гиперболы: $2a$. При этом расстояние между фокусами превосходит длину действительной оси: $|F_1F_2| > 2a$.

Если гипербола задана каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то расстояние от центра симметрии до каждого из фокусов рассчитывается по

формуле: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

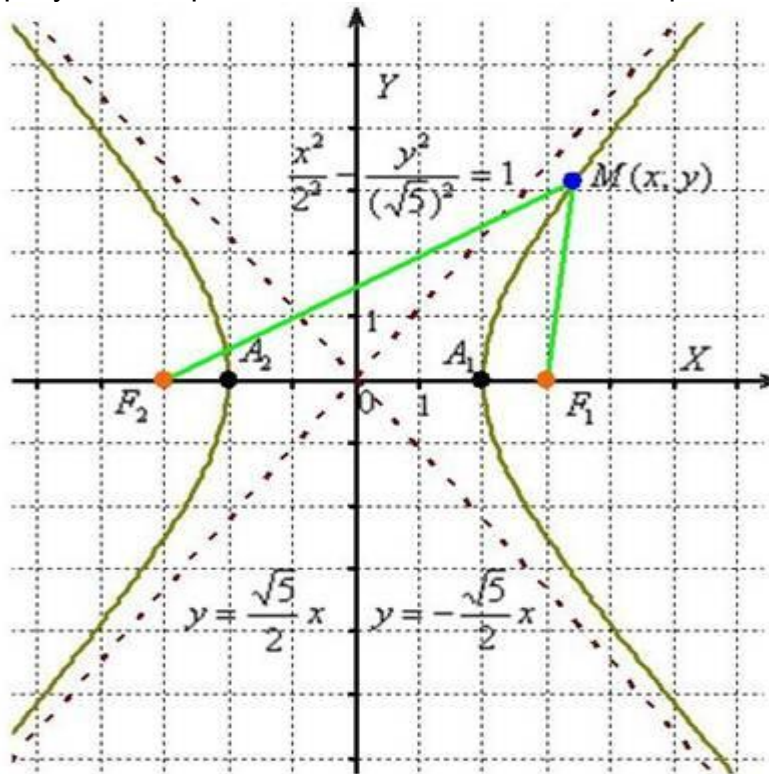
И, соответственно, фокусы имеют координаты $F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$.

Для исследуемой гиперболы $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$:

$$c = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

$$F_1(3; 0), F_2(-3; 0)$$

Разбираемся в определении. Обозначим через $|F_1M|, |F_2M|$ расстояния от фокусов до произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы:



Сначала мысленно передвигайте синюю точку по правой ветви гиперболы – где бы мы ни находились, **модуль** (абсолютное значение) разности между длинами отрезков F_1M, F_2M будет одним и тем же:

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a = const$$

Если точку $M(x, y)$ «перекинуть» на левую ветвь и перемещать её там, то данное значение останется неизменным.

Знак модуля нужен по той причине, что разность длин $|F_1M| - |F_2M|$ может быть как положительной, так и отрицательной. Кстати, для любой точки правой ветви $|F_1M| - |F_2M| < 0$ (поскольку отрезок F_1M короче отрезка F_2M). Для любой точки $M(x, y)$ левой ветви ситуация ровно противоположная и $|F_1M| - |F_2M| > 0$.

Более того, ввиду очевидного свойства модуля $||F_1M| - |F_2M|| = ||F_2M| - |F_1M||$ безразлично, что из чего вычитать.

Удостоверимся, что в нашем примере модуль данной разности действительно равен расстоянию между вершинами. Мысленно поместите точку $M(x, y)$ в правую вершину гиперболы (A_1) . Тогда: $||F_1M| - |F_2M|| = |1 - 5| = |-4| = 4 = 2a$, что и требовалось проверить.

Эксцентриситетом гиперболы называют отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Так как расстояние от центра до фокуса больше расстояния от центра до вершины: $c > a$, то эксцентриситет гиперболы всегда больше «единицы»: $\varepsilon > 1$.

Для данного примера: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

По аналогии с [эллипсом](#), зафиксировав значение $a = 2$, желающие могут провести самостоятельный анализ и проверку следующих фактов:

При увеличении эксцентриситета ветви гиперболы «распрямляются» к оси OY .

В предельном случае $\varepsilon \rightarrow \infty$ они стремятся занять положение двух прямых, проходящих через точки A_1, A_2 параллельно оси ординат.

Если же значение эксцентриситета приближается к единице, то ветви гиперболы «сплющиваются» к оси OX .

Равносторонняя гипербола

На практике часто встречается гипербола с равными полуосями. Если $b = a$, то

каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ заметно упрощается:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

А вместе с ним упрощаются и уравнения асимптот:

$$y = \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \frac{a}{a}x \Rightarrow y = x$$

$$y = -\frac{b}{a}x \Rightarrow y = -\frac{a}{a}x \Rightarrow y = -x$$

Прямые $y = x$, $y = -x$ пересекаются под прямым углом и «справедливо» делят координатную плоскость на 4 одинаковые части, в двух из которых находятся ветви кривой. Образно говоря, равносторонняя гипербола «идеально сложена», то есть и не растянута и не сплющена.

Так как $b = a$, то $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, следовательно,

эксцентриситет любой равносторонней гиперболы равен: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

Предлагаю закрепить теорию и практические навыки миниатюрной задачей:

Пример 5

Построить гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ и найти её фокусы.

Это пример для самостоятельного решения. Кто пропустит, тот пропустит многое ;-) Решение и чертёж в конце урока.

Начнём тревожить беззаботное существование нашей кривой:

Поворот вокруг центра и параллельный перенос гиперболы

Вернёмся к демонстрационной гиперболе $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$. Что произойдёт, если в

полученном уравнении поменять значения полуосей: $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$? Для эллипса данный трюк означал поворот на 90 градусов. Но здесь всё иначе!

Уравнение $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ определяет **совершенно другую гиперболу**. Ну, хотя бы обратите внимание на иные вершины: $A_1(\sqrt{5}, 0)$, $A_2(-\sqrt{5}, 0)$.

Теперь рассмотрим уравнение $-\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, которое очевидно тоже задаёт гиперболу. Однако к исходному уравнению оно также не имеет никакого отношения! Это предыдущая гипербола, повернутая на 90 градусов, с вершинами $A_1(0, \sqrt{5})$, $A_2(0, -\sqrt{5})$ на оси ординат.

И, наконец, оставшийся случай $-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ задаёт нашу

гиперболу $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, повернутую на 90 градусов. Как быть, если в практической задаче встретилась такая неканоническая запись?

Если требуется только построить кривую, то строим её в предложенном виде. Это довольно просто. Уравнения асимптот

гиперболы $-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ обладают *обратными* угловыми коэффициентами:
 $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x, \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x$

Поскольку оси «поменялись ролями», то вершины будут расположены на оси ординат в точках $A_1(0; 2), A_2(0; -2)$. Выразим верхнюю ветвь гиперболы:

$$-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{5} + 1 \Rightarrow y = 2\sqrt{\frac{x^2+5}{5}}$$

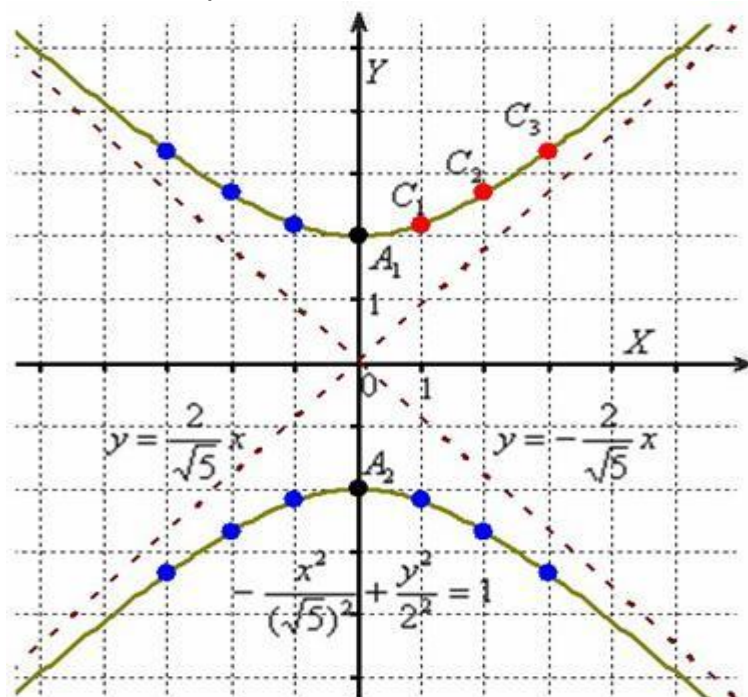
И найдём несколько дополнительных точек:

$$C_1: x=1 \Rightarrow y = 2 \cdot \sqrt{\frac{1^2+5}{5}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 2,2;$$

$$C_2: x=2 \Rightarrow y = 2 \cdot \sqrt{\frac{2^2+5}{5}} = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 2,7;$$

$$C_3: x=3 \Rightarrow y = 2 \cdot \sqrt{\frac{3^2+5}{5}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{14}{5}} \approx 3,35.$$

Выполним чертёж:



Помимо геометрии, подобные графики требуется строить в некоторых задачах математического анализа.

Однако по возможности всё-таки лучше осуществить поворот на 90 градусов и

переписать уравнение $-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ в канонической форме. Для этого следует **поменять местами значения полуосей и переставить «минус» к**

переменной «игрек»: $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$.

И далее работать уже с каноническим уравнением.

! Примечание: строгий теоретический подход предполагает поворот координатных осей, а не самой линии. При необходимости оформляйте решение по аналогии с соответствующим примечанием предыдущего урока.

Параллельный перенос. Уравнение $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ задаёт гиперболу с действительной полуосью «а», мнимой полуосью «бэ» и центром в точке $\tilde{O}(x_0; y_0)$.

Так, например, гипербола $\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ имеет центр симметрии в точке $\tilde{O}(1; -1)$. Асимптоты, само собой, переместились вместе с гиперболой, их уравнения отыскиваются по формулам:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \quad y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0)$$

$$y + 1 = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1) \quad y + 1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \quad y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$$

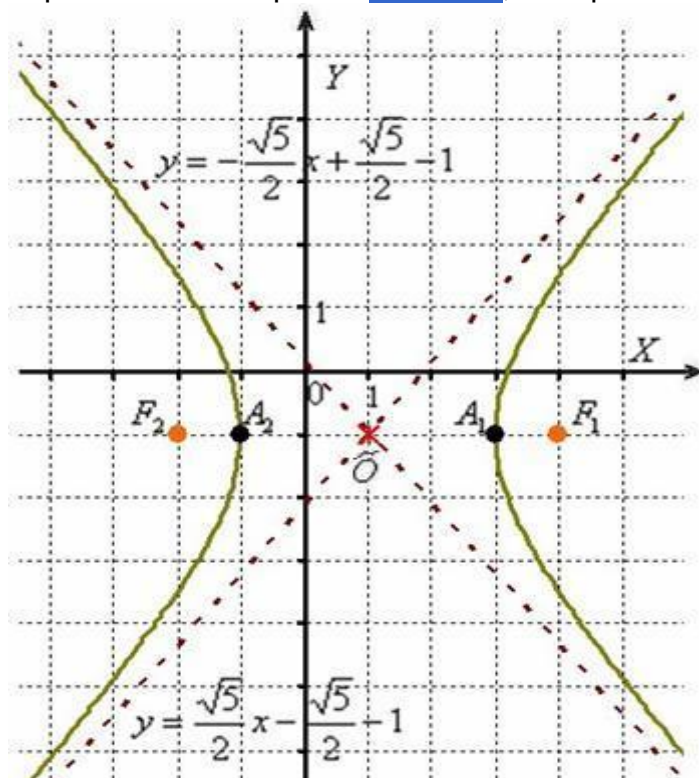
Полуоси $a = 2, b = \sqrt{5}$ и расстояние от фокусов до центра симметрии $c = 3$ остались прежними, а вот координаты фокусов изменились с учётом параллельного переноса:

$$F_1(c + x_0; y_0), F_2(-c + x_0; y_0)$$

$$F_1(3 + 1; -1), F_2(-3 + 1; -1)$$

$$F_1(4; -1), F_2(-2; -1)$$

Параллельный перенос гиперболы доставил заметно больше хлопот, чем параллельный перенос [эллипса](#), смотрим на картинку:



После таких трудов, уравнение трогать бессмысленно, но если таки просят, то придётся....

В нестрогом варианте: «Приведём уравнение гиперболы каноническому виду путём параллельного переноса в начало координат: $\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ к

координат: $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ ».

Или в строгом – с параллельным переносом системы координат началом в точку $\tilde{O}(1; -1)$ (см. шаблон у [эллипса](#)).

На практике часто встречается комбинация поворота на произвольный угол и параллельного переноса гиперболы. Данная ситуация рассматривается на уроке [Приведение уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду](#).

Парабола и её каноническое уравнение

Свершилось! Она самая. Готовая раскрыть немало тайн. Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, где $p > 0$ – действительное число. Нетрудно заметить, что в своём стандартном положении парабола «лежит на боку» и её вершина находится в начале координат. При этом

функция $y = \sqrt{2px}$ задаёт верхнюю ветвь данной линии, а функция $y = -\sqrt{2px}$ –

нижнюю ветвь. Очевидно, что парабола симметрична относительно оси OX . Собственно, чего париться:

Пример 6

Построить параболу $y^2 = 4x$

Решение: вершина известна, найдём дополнительные точки.

Уравнение $y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ определяет верхнюю дугу параболы, уравнение $y = -2\sqrt{x}$ – нижнюю дугу.

В целях сократить запись вычисления проведём «под одной гребёнкой» $y = \pm 2\sqrt{x}$:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{2} \approx \pm 1,41;$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \pm 2 \cdot \sqrt{1} = \pm 2;$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \pm 2 \cdot \sqrt{2} \approx \pm 2,83;$$

$$x = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \cdot \sqrt{4} = \pm 4.$$

Для компактной записи результаты можно было свести в таблицу.

Перед тем, как выполнить элементарный поточечный чертёж, сформулируем строгое

определение параболы:

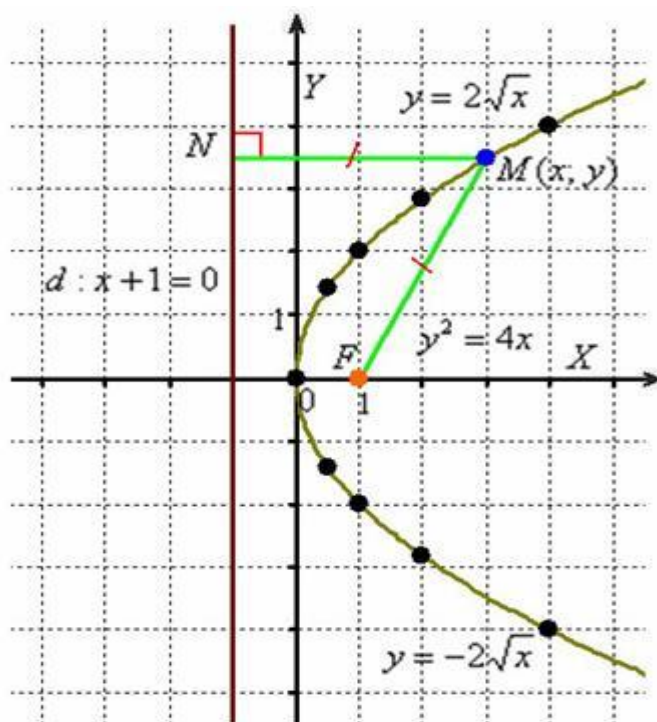
Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой d , не проходящей через точку F .

Точка F называется **фокусом** параболы, прямая d – **директрисой** (пишется с одной «эс») параболы. Константа «пэ» канонического

уравнения $y^2 = 2px$ называется **фокальным параметром**, который равен расстоянию от фокуса до директрисы. В данном случае $p = 2$. При этом фокус

имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а директриса задаётся уравнением $x + \frac{p}{2} = 0$.

В нашем примере $F(1; 0)$, $d: x + 1 = 0$.



Определение параболы понимается ещё проще, чем определения эллипса и гиперболы. Для любой точки $M(x, y)$ параболы длина отрезка FM (расстояние от фокуса до точки) равна длине перпендикуляра MN (расстоянию от точки до директрисы):

$$|FM| = |MN|$$

Поздравляю! Многие из вас сегодня сделали самое настоящие открытие. Оказывается, гипербола и парабола вовсе не являются графиками «рядовых» функций, а имеют ярко выраженное геометрическое происхождение.

Очевидно, что при увеличении фокального параметра ветви графика $y^2 = 2px$ будут «раздаваться» вверх и вниз, бесконечно близко приближаясь к оси OY . При уменьшении же значения «пэ» они начнут сжиматься и вытягиваться вдоль оси OX .

Эксцентриситет любой параболы равен единице: $\varepsilon = 1$

Поворот и параллельный перенос параболы

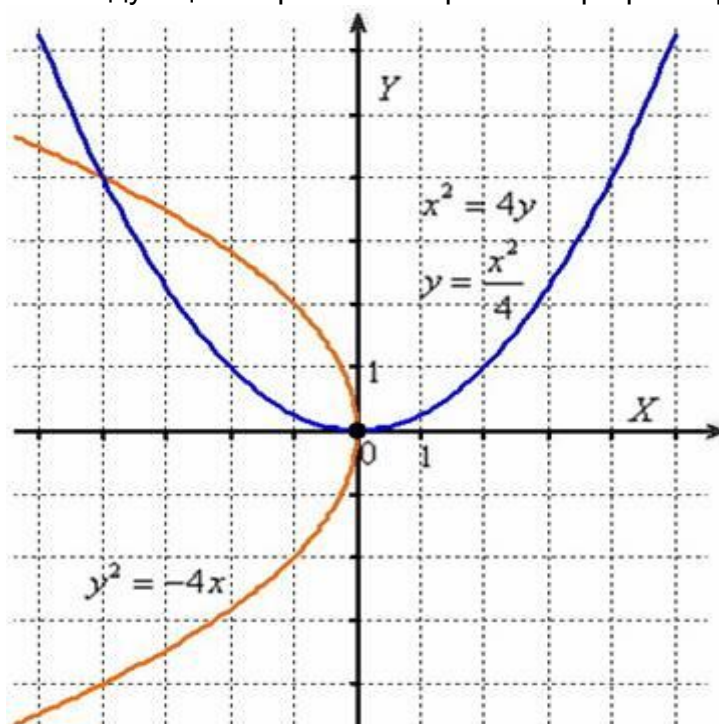
Парабола – одна из самых распространённых линий в математике, и строить её придётся действительно часто. Поэтому, пожалуйста, особенно внимательно отнестись к заключительному параграфу урока, где я разберу типовые варианты расположения данной кривой.

! Примечание: как и в случаях с предыдущими кривыми, корректнее говорить о повороте и параллельном переносе координатных осей, но автор ограничится упрощённым вариантом изложения, чтобы у читателя сложились элементарные представления о данных преобразованиях.

1) Поворот вокруг вершины. Если в уравнении присутствует знак «минус»: $y^2 = -2px$, то это означает **разворот параболы на 180 градусов** относительно своего канонического положения. А если в

уравнении $y^2 = 2px$ переменные «поменялись местами»: $x^2 = 2py$, то это означает **поворот канонической параболы на 90 градусов против часовой стрелки**.

На следующем чертеже изображены графики кривых $y^2 = -4x$, $x^2 = 4y$:



Оба уравнения задают неканоническое расположение нашей подопытной параболы $y^2 = 4x$, причём во втором случае легко получить функциональную запись, к которой мы привыкли в курсе математического

анализа: $x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$.

Таким образом, все параболы, с которыми мы обычно работаем – не каноничны! Я очень хотел «уложить на бок» классическую параболу $y = x^2$ и разобрать каноническое уравнение $y^2 = x$, но, к сожалению, у неё достаточно

малый фокальный параметр $p = \frac{1}{2}$, и чертеж с точкой

фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) = F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$, директрисой $x + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{4} = 0$ был бы крайне невразумителен.

2) Параллельный перенос. Без всякой оригинальности.

Уравнение $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ задаёт ту же параболу $y^2 = 2px$ с вершиной в точке $\tilde{O}(x_0; y_0)$. По моим наблюдениям, во многих задачах матана очень

популярен частный случай $y^2 = 2p(x - x_0)$ – когда каноническая парабола сдвигается влево или вправо по оси абсцисс. Ну, и как дополнительная опция, разворачивается, если при переменной «икс» есть знак «минус».

Соответствующее творческое задание для самостоятельного решения:

Пример 7

Построить параболу $y^2 = -2x + 3$. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокус и уравнение директрисы.

Как лучше действовать?

По условию требуется построить параболу $y^2 = -2x + 3$. Именно такую – в неканоническом виде! Поэтому в первой части задачи следует представить уравнение в виде $y^2 = 2p(x - x_0)$, что позволит сразу определить вершину. Затем по образцу Примера 6 нужно провести поточечное построение линии, работая с уравнениями $y = \pm\sqrt{2p(x - x_0)}$.

Вторая часть задания предполагает приведение уравнения к каноническому виду. Проанализируйте равенство $y^2 = 2p(x - x_0)$ – есть ли поворот, есть ли параллельный перенос? После того, как выясните каноническую

запись $y^2 = 2px$, необходимо найти фокус параболы и уравнение её директрисы. Обратите внимание, что в контексте условия это, вероятнее всего, нужно сделать в каноническом положении!

Ну, а наша обзорная экскурсия подошла к концу, и я надеюсь, что у вас не возникло и не возникнет трудностей с тремя атлантами темы – эллипсом, гиперболой и параболой. Предлагаю узнать новый теоретический материал и закрепить практические навыки на уроке [Задачи с линиями 2-го порядка](#).

Желаю успехов!

Решения и чертежи:

Пример 5: Решение: данная гипербола является равносторонней, поэтому имеет асимптоты $y = x, y = -x$. Действительная полуось $a = 1$, значит, вершины расположены в точках $A_1(1; 0), A_2(-1; 0)$. Найдём дополнительные точки:

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$$

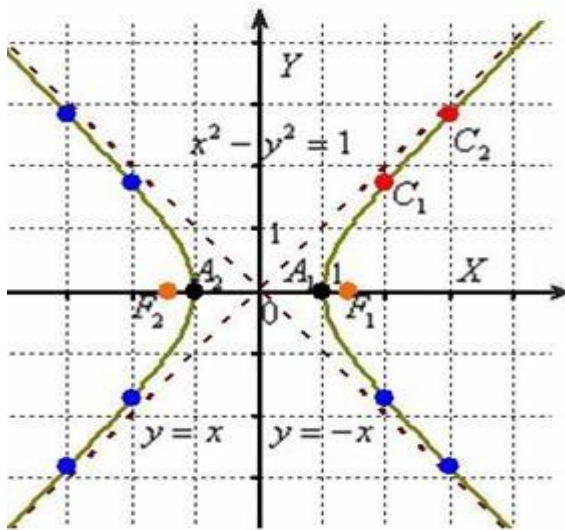
$$C_1: x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3} \approx 1,73$$

$$C_2: x = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3^2 - 1} = \sqrt{8} \approx 2,83.$$

Определим координаты фокусов: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$F_1(\sqrt{2}; 0), F_2(-\sqrt{2}; 0)$$

Выполним чертёж:



Перед вами «школьная» гипербола в каноническом положении. График

функции $y = \frac{1}{x}$ получается путём поворота (вокруг начала координат)

построенного графика $x^2 - y^2 = 1$ на 45 градусов против часовой стрелки (а если строже – путём поворота системы координат на противоположно ориентированный угол в «минус» 45 градусов).

И в общем случае – график обратной

пропорциональности $y = \frac{m}{x}$ представляет собой равностороннюю гиперболу, уравнение которой можно привести к каноническому виду $x^2 - y^2 = a^2$.

Пример 7: Решение: преобразуем уравнение:

$$y^2 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Вершина параболы находится в точке $\tilde{O}\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, ветви направлены влево. С

помощью уравнений $y = \pm \sqrt{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)}$ найдём дополнительные точки:

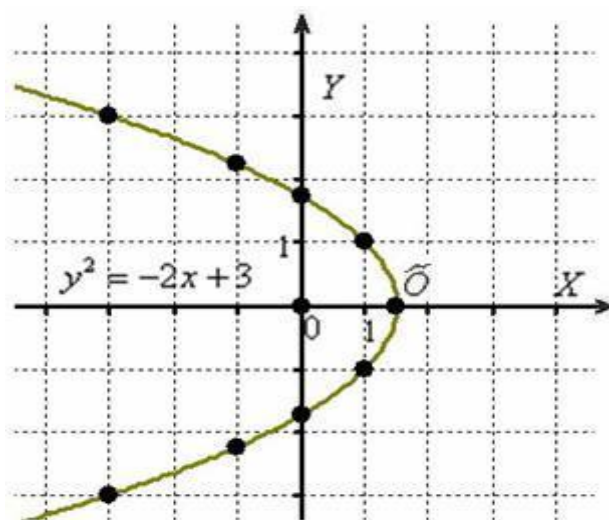
$$x = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{-2\left(1 - \frac{3}{2}\right)} = \pm \sqrt{1} = \pm 1;$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{-2\left(0 - \frac{3}{2}\right)} = \pm \sqrt{3} = \pm 1,73;$$

$$x = -1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{-2\left(-1 - \frac{3}{2}\right)} = \pm \sqrt{5} = \pm 2,24;$$

$$x = -3 \Rightarrow y = \pm \sqrt{-2\left(-3 - \frac{3}{2}\right)} = \pm \sqrt{9} = \pm 3.$$

Выполним чертёж:



Парабола $y^2 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)$ получена путём поворота параболы $y^2 = 2x$ на 180

градусов и её параллельного переноса в точку $\tilde{O}\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. Из канонического уравнения $y^2 = 2 \cdot 1 \cdot x$ находим фокальный параметр $p = 1$,

фокус $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) = F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ и уравнение директрисы $d: x + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow d: x + \frac{1}{2} = 0$.

Примечание: в случае необходимости нетрудно найти координаты фокуса и уравнение директрисы неканонически расположенной параболы $y^2 = -2x + 3$. Учитывая поворот и параллельный перенос: $F(1; 0)$, $d: x - 2 = 0$.

Автор: Емелин Александр