Прочитать и построить Построить СДНФ, СКНФ по таблице истинности – примеры в конце материала.

Работу сдать до 7.12.20

Посмотрите видео урок по Построение совершенных дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм (СДНФ и СКНФ)
- https://www.youtube.com/watch?v=iju48E7fJUs

Прочитать и разобраться как строить.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма и совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Известно два способа задания логических функций: с помощью формулы и с помощью таблицы истинности. По формуле легко составляется таблица. На практике при конструировании различных электронных устройств часто возникает обратная задача – от таблицы истинности перейти к формуле, чтобы на ее основе построить функциональную схему.

Введем следующие определения:

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причем среди переменных могут быть одинаковые.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причем среди переменных могут быть одинаковые.

Всякую дизъюнкцию элементарных конъюнкций назовем дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Всякую конъюнкцию элементарных дизъюнкций назовем конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно, с отрицанием).
Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) — это КНФ, удовлетворяющая трем условиям:
1. не содержит одинаковых элементарных дизъюнкций;
2. ни одна из дизъюнкций не содержит одинаковых переменных;
3. каждая элементарная дизъюнкция содержит каждую переменную из входящих в данную КНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно, с отрицанием).
СДНФ Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) — это ДНФ, удовлетворяющая трем условиям:
1. не содержит одинаковых элементарных конъюнкций;
2. ни одна из конъюнкций не содержит одинаковых переменных;
3. каждая элементарная конъюнкция содержит каждую переменную из входящих в данную ДНФ, к тому же в одинаковом порядке.

Правила построения СКНФ по таблице истинности Для каждого набора переменных, при котором функция равна 0, записывается сумма, причем переменные, которые имеют значение 1, берутся с отрицанием.

Правила построения СДНФ по таблице истинности Для каждого набора переменных, при котором функция равна 1, записывается произведение, причем переменные, которые имеют значение 0 берут с отрицанием.

Таким образом для С-совершенной нормальной формы еще нужна минимизация.
Минимизацию можно выполнить с помощью карт Карно или в ручную, упрощениями по правилам.

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности:

1. Отметить те строчки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоят 1
2. Выписать для каждой отмеченной строки конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке равно 1, то в конъюнкцию включать саму эту переменную, если равно 0, то ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности:

1. Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоит 0.
2. Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке равно 0, то в дизъюнкцию включать саму эту переменную, если равно 1, то ее отрицание
3. Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию

Примечание: для нахождения формулы по таблице истинности рекомендуется использовать тот из двух алгоритмов, в котором в таблице помечается меньше строк.

Одна форма в другую переводится с помощью двойного отрицания и последовательного упрощения после каждого накладываемого отрицания.

Ещё раз то же самое! Но другими словами.

Дизъюнктивная и конъюнктивная совершенные нормальные формы

Для всякой логической формулы с помощью тождественных преобразований можно построить бесконечно много равносильных ей формул. В алгебре логики одной из основных задач является поиск канонических форм (т. е. формул, построенных по единому правилу, канону).

Если логическая функция выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание переменных, то такая форма представления называется нормальной.

Среди нормальных форм выделяются совершенные нормальные формы (такие формы, в которых функции записываются единственным образом).

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

Определение. *Формулу называют элементарной конъюнкцией, если она образованна конъюнкцией некоторого числа переменных или их отрицаний.*
Примеры: y, $\neg y$, $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$

Определение. *Формула называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ), если она является дизъюнкцией неповторяющихся элементарных конъюнкций.*
ДНФ записывается в следующей форме: $F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$, где F_i - элементарная конъюнкция

Примеры: $\neg x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \neg x_2 \vee x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$, $\neg y_1 \vee y_1 \wedge y_2 \vee \neg y_2$

Определение. *Логическая формула от k переменных называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ), если:*
1) формула является ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция есть конъюнкция k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем на i-м месте этой конъюнкции стоит либо переменная

x_i, либо ее отрицание;
2) все элементарные конъюнкции в такой ДНФ попарно различны.
Пример: $(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

Определение. *Формулу называют элементарной дизъюнкцией, если она образована дизъюнкцией некоторого числа переменных или их отрицаний.*
Примеры: $\neg x_3$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$
Определение. *Формула называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ), если она является конъюнкцией неповторяющихся элементарных дизъюнкций.*
КНФ записывается в следующей форме: $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n$, где F_i - элементарная дизъюнкция

Примеры: $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge x_3$, $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$
Определение. *Логическая формула от k переменных называется совершенной конъюнктивной нормальной формой (КДНФ), если:*
1) формула является КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция есть дизъюнкция k переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$, причем на i-м месте этой дизъюнкции стоит либо переменная x_i, либо ее отрицание;
2) все элементарные дизъюнкции в такой КНФ попарно различны.
Пример: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$
Заметим, что **любую логическую функцию, не равную тождественно 0 или 1, можно представить в виде СДНФ или СКНФ**.

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. Выбрать все строки таблицы, в которых значение функции равно единице.
2. Для каждой такой строки записать конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. Выбрать все строки таблицы, в которых значение функции равно нулю.
2. Для каждой такой строки записать дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 0, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

Анализ алгоритмов показывает, что если на большей части строк таблицы истинности значение функции равно 0, то для получения ее логической формулы лучше построить СДНФ, в противном случае - СКНФ.

Пример: Дана таблица истинности логической функции от трех переменных. Построить логическую формулу, реализующую эту функцию.

x	**y**	**z**	**F (x, y, z)**

0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Т.к. на большинстве строк таблицы истинности значение функции равно 1, то построим СКНФ. В результате получим следующую логическую формулу: $F = (\neg x \lor y \lor z) \land (\neg x \lor y \lor \neg z)$

Проверим полученную формулу. Для этого построим таблицу истинности функции.

x	**y**	**z**	**¬ x**	**¬ x ∨ y ∨ z**	**¬ z**	**¬ x ∨ y ∨ ¬ z**	**F (x, y, z)**
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1

Сравнив исходную таблицу истинности и построенную для логической формулы, заметим, что столбцы значений функции совпадают. Значит, логическая функция построена верно.

Задание

1 Построить СДНФ по таблице истинности

Пример: $\neg y_1 \lor y_1 \land y_2 \lor \neg y_2$

2 Построить СКНФ по таблице истинности

Пример: $(x_1 \lor \neg x_2) \land x_3$,