

Многочлены Жегалкина. Линейные функции. Монотонные функции.

Рассмотрим систему функций:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad f_3(x_1) = 0, \quad f_4(x_1) = 1. \quad (***)$$

Суперпозицию функций системы (***) можно преобразовать, пользуясь правилами элементарной алгебры и специальными правилами:

$$c + c = 0, \quad c \cdot c = c, \quad c + 0 = c.$$

В частности, если раскрыть скобки и привести подобные члены, то полученная сумма «одночленов» называется многочленом Жегалкина.

Скажу по-другому:

Полином Жегалкина — это логическая функция, использующая две операции: конъюнкцию и разделительную дизъюнкцию. Полином предложен российским математиком Иваном Ивановичем Жегалкиным в 1927 году.

Назначение полинома Жегалкина — это алгебраическое выражение логических функций. Введём обозначения:

n – число аргументов функции;

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – набор аргументов функции;

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – полином Жегалкина.

Операции:

конъюнкция;

разделительная дизъюнкция.

Конъюнкция — это логическая операция аналогичная арифметическому произведению. Для констант используется обозначение точкой, а для переменных точка опускается.

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

Разделительная дизъюнкция — это логическая операция аналогичная арифметическому сложению по модулю 2. Используется обозначение знаком плюс в кружке.

$$0 \oplus 0 = 0$$

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$1 \oplus 1 = 0$$

[править]Формула

Полином Жегалкина имеет следующий вид:

$$P(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus \dots \oplus a_{n-1n} x_{n-1} x_n \oplus \dots \oplus a_{1\dots n} x_1 \dots x_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \Leftrightarrow P(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} a_{i_1 \dots i_k} \prod_{j=1}^k x_{i_j}$$

- Заметим, что коэффициенты $a_{i_1 \dots i_k}$ принимают значения из множества $\{0, 1\}$, причём если коэффициент равен нулю, то соответствующее слагаемое может быть опущено.
- Полином Жегалкина, состоящий только из слагаемых с единичными коэффициентами (т. е. с опущенными слагаемыми с нулевыми коэффициентами), называется алгебраической нормальной формой (АНФ) соответствующей логической функции.

[править]Примеры полиномов:

[править]С одной переменной

$$P(x_1) = 0 \quad - \text{константа } 0$$

$$P(x_1) = 1 \quad - \text{константа } 1$$

$$P(x_1) = x_1 \quad - \text{тождественность}$$

$$P(x_1) = 1 \oplus x_1 \quad - \text{отрицание, } \bar{x}_1$$

[править]С двумя переменными

$P(x_1, x_2) = 0$ – константа 0

$P(x_1, x_2) = 1$ – константа 1

$P(x_1, x_2) = x_1$ – тождественность x_1

$P(x_1, x_2) = x_2$ – тождественность x_2

$P(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1$ – отрицание x_1 , $\bar{x}_1$

$P(x_1, x_2) = 1 \oplus x_2$ – отрицание x_2 , $\bar{x}_2$

$P(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$ – дизъюнкция, $x_1 \vee x_2$

$P(x_1, x_2) = x_1 x_2$ – конъюнкция, $x_1 \wedge x_2$

$P(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$ – эквивалентность, $x_1 \leftrightarrow x_2$

$P(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – раздельная дизъюнкция, $x_1 \underline{\vee} x_2$

$P(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$ – стрелка Пирса, $x_1 \downarrow x_2$

$P(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 x_2$ – штрих Шеффера, $x_1 | x_2$

$P(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2$ – импликация, $x_1 \rightarrow x_2$

$P(x_1, x_2) = 1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$ – обратная импликация, $x_1 \leftarrow x_2$

$P(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_1 x_2$ – отрицание импликации, $\overline{x_1 \rightarrow x_2}$

$P(x_1, x_2) = x_2 \oplus x_1 x_2$ – отрицание обратной импликации, $\overline{x_1 \leftarrow x_2}$

▪ Значения полиномов Жегалкина задаются с помощью таблицы истинности или определяются по формулам.

▪ Полином Жегалкина является предикатом, определённым на множестве $\{0,1\}$.

Теорема 1: Для любой функции алгебры логики существует многочлен Жегалкина, задающий эту функцию.

Доказательство: Действительно, в предыдущем параграфе было доказано, что система функций $\{x \cdot y, \bar{x}\}$ является полной в C_1 . Полную систему образует и система функций $\{x \cdot y, x + y, 0, 1\}$, так как $\bar{x} = x + 1$. Теорема доказана.

Можно доказать, что каждая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляется в виде многочлена Жегалкина *единственным* образом. Это следует из доказанной теоремы и того факта, что число многочленов Жегалкина от

переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ равно 2^{2^n} , т. е. совпадает с числом всех функций алгебры логики от этих переменных.

Определение 1: Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **линейной**, если имеет место соотношение: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$.

Теорема 2: Функция, представленная многочленом Жегалкина, существенно зависит от всех входящих в него переменных.

Теорема 3: Суперпозицией из произвольной нелинейной функции и одной из констант можно получить нелинейную функцию от 2-х переменных.

Теорема 4: Суперпозицией из нелинейной функции от двух переменных и отрицания можно получить конъюнкцию.

Определение 3: Функция алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **монотонной**, если для всяких наборов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ таких, что $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ имеем неравенство:

Например, нетрудно заметить, что *константы, конъюнкция, дизъюнкция являются монотонными функциями.*

Теорема 5: Множество всех монотонных функций образует замкнутый класс.

Теорема 6: Суперпозициями любой немонотонной функции и констант можно получить отрицание.

Примеры построения различных представлений логических функций

<https://programforyou.ru/calculators/postroenie-tablitci-istinnosti-sknf-sdnf>

Карта Карно

https://wiki2.org/ru/%D0%9A%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B0_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%BD%D0%BE

прочитайте, разберитесь и приготовьтесь к проверочной работе.