

Прочитать, законспектировать и

выслать мне фото конспекта до 12.00 20.11.2020 г.

Прямая на плоскости - понятие.

Прежде чем дать понятие прямой на плоскости, следует четко представлять себе что же представляет собой плоскость. **Представление о плоскости** позволяет получить, к примеру, ровная поверхность стола или стены дома. Следует, однако, иметь в виду, что размеры стола ограничены, а плоскость простирается и за пределы этих границ в бесконечность (как будто у нас сколь угодно большой стол).

Если взять хорошо заточенный карандаш и дотронуться его стержнем до поверхности «стола», то мы получим изображение точки. Так мы получаем **представление о точке на плоскости**.

Теперь можно переходить и к **понятию прямой линии на плоскости**.

Положим на поверхность стола (на плоскость) лист чистой бумаги. Для того чтобы изобразить прямую линию, нам необходимо взять линейку и провести карандашом линию на сколько это позволяют сделать размеры используемой линейки и листа бумаги. Следует отметить, что таким способом мы получим лишь часть прямой. Прямую линию целиком, простирающуюся в бесконечность, мы можем только вообразить.

Взаимное расположение прямой и точки.

Начать следует с аксиомы: на каждой прямой и в каждой плоскости имеются точки.

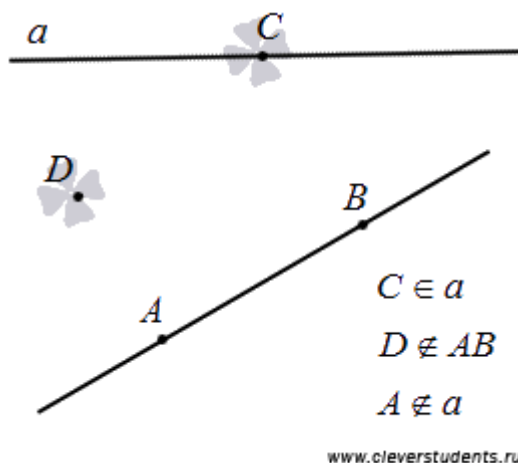
Точки принято обозначать большими латинскими буквами, например, точки A и F . В свою очередь прямые линии обозначают малыми латинскими буквами, к примеру, прямые a и d .

Возможны два **варианта взаимного расположения прямой и точки на плоскости**: либо точка лежит на прямой (в этом случае также говорят, что прямая проходит через точку), либо точка не лежит на прямой (также говорят, что точка не принадлежит прямой или прямая не проходит через точку).

Для обозначения принадлежности точки некоторой прямой используют символ « $\in$ ». К примеру, если точка A лежит на прямой a , то можно записать $A \in a$. Если точка A не принадлежит прямой a , то записывают $A \notin a$.

Справедливо следующее утверждение: через любые две точки проходит единственная прямая.

Это утверждение является аксиомой и его следует принять как факт. К тому же, это достаточно очевидно: отмечаем две точки на бумаге, прикладываем к ним линейку и проводим прямую линию. Прямую, проходящую через две заданные точки (например, через точки A и B), можно обозначать двумя этими буквами (в нашем случае прямая AB или BA).



Следует понимать, что на прямой, заданной на плоскости, лежит бесконечно много различных точек, причем все эти точки лежат в одной плоскости. Это утверждение устанавливается аксиомой: если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то все точки этой прямой лежат в этой плоскости.

Множество всех точек, расположенных между двумя заданными на прямой точками, вместе с этими точками называют **отрезком прямой** или просто **отрезком**. Точки, ограничивающие отрезок, называются концами отрезка. Отрезок обозначают двумя буквами, соответствующими точкам концов отрезка. К примеру, пусть точки A и B являются концами отрезка, тогда этот отрезок можно обозначить AB или BA . Обратите внимание, что такое обозначение отрезка совпадает с обозначением прямой. Чтобы избежать путаницы, рекомендуем к обозначению добавлять слово «отрезок» или «прямая».

Для краткой записи принадлежности и не принадлежности некоторой точки некоторому отрезку используют все те же

символы $\in$ и $\notin$. Чтобы показать, что некоторый отрезок лежит или не лежит на прямой пользуются

символами $\subset$ и $\not\subset$ соответственно. К примеру, если отрезок AB принадлежит прямой a , можно кратко записать $AB \subset a$.

Следует также остановиться на случае, когда три различных точки принадлежат одной прямой. В этом случае одна, и только одна точка, лежит между двумя другими. Это утверждение является очередной аксиомой. Пусть точки A , B и C лежат на одной прямой, причем точка B лежит между точками A и C . Тогда можно говорить, что точки A и C находятся по разные стороны от точки B . Также можно сказать, что точки B и C лежат по одну сторону от точки A , а точки A и B лежат по одну сторону от точки C .

Для полноты картины заметим, что любая точка прямой делит эту прямую на две части — два **луча**. Для этого случая дается аксиома: произвольная точка O , принадлежащая прямой, делит эту прямую на два луча, причем две любые точки одного луча лежат по одну сторону от точки O , а две любые точки разных лучей — по разные стороны от точки O .

Взаимное расположение прямых на плоскости.

Сейчас ответим на вопрос: «Как могут располагаться две прямые на плоскости относительно друг друга?»

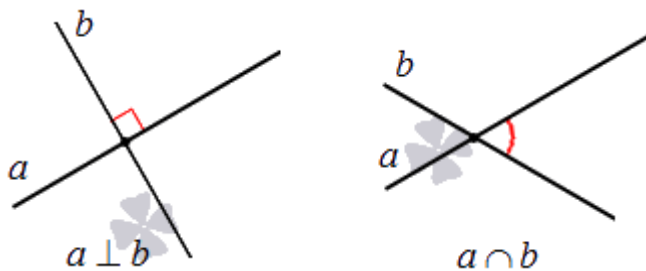
Во-первых, две прямые на плоскости могут **совпадать**.

Это возможно в том случае, когда прямые имеют по крайней мере две общие точки. Действительно, в силу аксиомы, озвученной в предыдущем пункте, через две точки проходит единственная прямая. Иными словами, если через две заданные точки проходят две прямые, то они совпадают.

Во-вторых, две прямые на плоскости могут **пересекаться**.

В этом случае прямые имеют одну общую точку, которую называют точкой пересечения прямых. Пересечение прямых обозначают символом « $\cap$ », к примеру, запись $a \cap b = M$ означает, что прямые a и b пересекаются в точке M . Пересекающиеся прямые приводят нас к понятию **угла между пересекающимися прямыми**. Отдельно стоит рассмотреть расположение прямых на плоскости, когда угол между ними равен девяносто градусам. В этом случае прямые называются **перпендикулярными** (рекомендуем статью [перпендикулярные прямые, перпендикулярность прямых](#)). Если прямая a перпендикулярна прямой b , то можно использовать

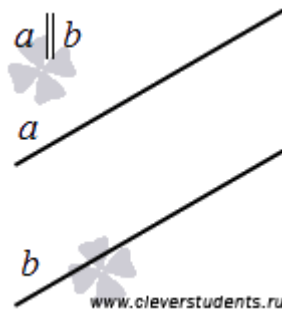
краткую запись $a \perp b$.



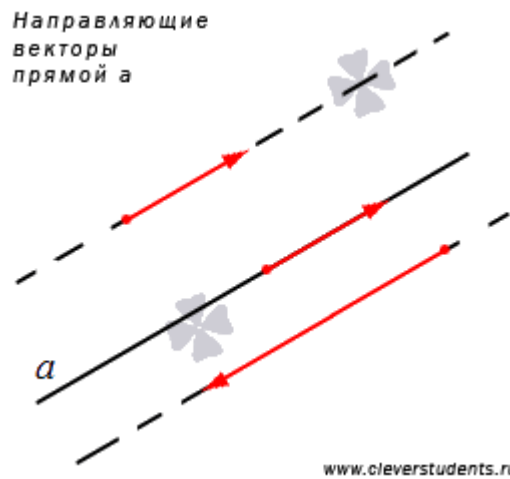
В-третьих, две прямые на плоскости могут быть параллельными.

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек. Если прямая a параллельна прямой b , то

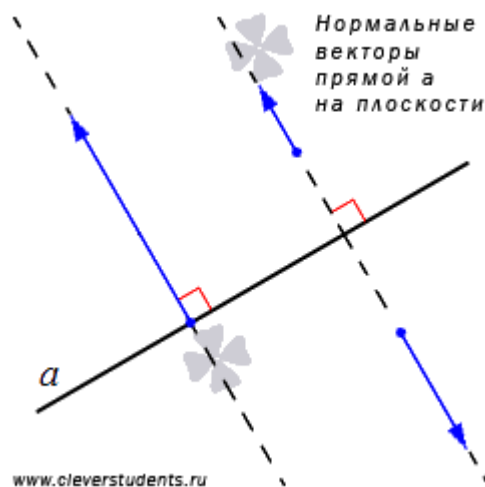
используют символическое обозначение $a \parallel b$. Для более полной информации смотрите статью [параллельные прямые, параллельность прямых](#).



Прямую линию на плоскости с практической точки зрения удобно рассматривать вместе с векторами. Особое значение имеют ненулевые векторы, лежащие на данной прямой или на любой из параллельных прямых, их называют **направляющими векторами прямой**. В статье [направляющий вектор прямой на плоскости](#) даны примеры направляющих векторов и показаны варианты их использования при решении задач.



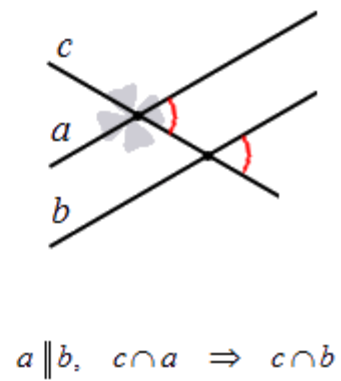
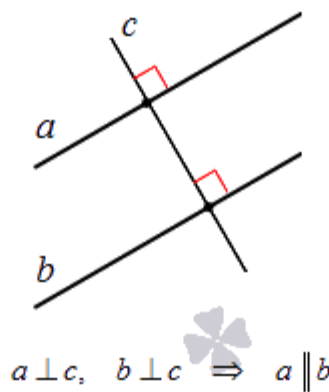
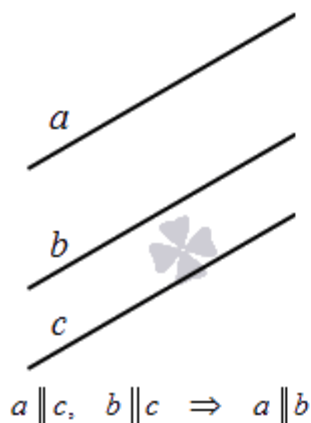
Также следует обратить внимание на ненулевые векторы, лежащие на любой из прямых, перпендикулярных данной. Такие векторы называют **нормальными векторами прямой**. О применении нормальных векторов прямой рассказано в статье [нормальный вектор прямой на плоскости](#).



Когда на плоскости даны три и более прямых линии, то возникает множество различных вариантов их взаимного расположения. Все прямые могут быть параллельными, в противном случае некоторые или все из них пересекаются. При этом все прямые могут пересекаться в единственной точке (смотрите статью [пучок прямых](#)), а могут иметь различные точки пересечения.

Не будем подробно останавливаться на этом, а приведем без доказательства несколько примечательных и очень часто используемых фактов:

- если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой;
- если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны между собой;
- если на плоскости некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую прямую.



Способы задания прямой на плоскости.

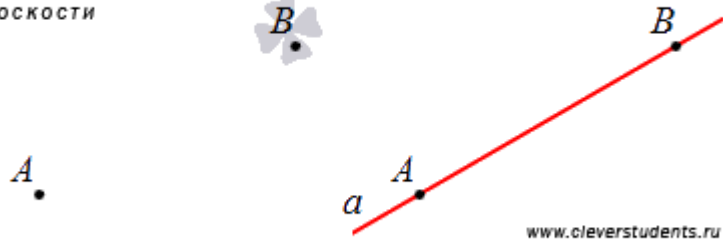
Сейчас мы перечислим основные способы, которыми можно задать конкретную прямую на плоскости. Это знание очень полезно с практической точки зрения, так как на нем основывается решение очень многих примеров и задач.

Во-первых, прямую можно задать, указав две точки на плоскости.

Действительно, из аксиомы, рассмотренной в первом пункте этой статьи, мы знаем, что через две точки проходит прямая, и притом только одна.

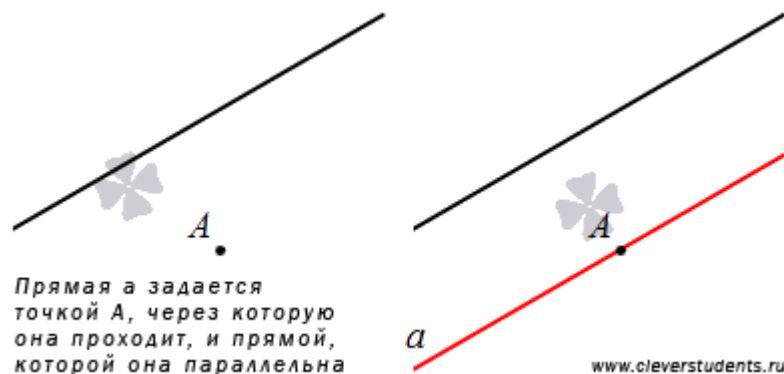
Если в прямоугольной системе координат на плоскости указаны координаты двух несовпадающих точек, то есть возможность записать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Прямая a определяется двумя точками A и B на плоскости



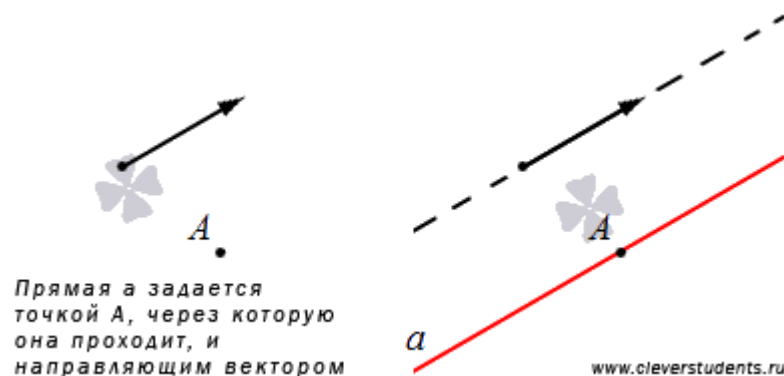
Во-вторых, прямую можно задать, указав точку, через которую она проходит, и прямую, которой она параллельна. Этот способ справедлив, так как через данную точку плоскости проходит единственная прямая, параллельная заданной прямой. Доказательство этого факта проводилось на уроках геометрии в средней школе.

Если прямую на плоскости задать таким способом относительно введенной прямоугольной декартовой системы координат, то есть возможность составить ее уравнение. Об этом написано в статье уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданной прямой.



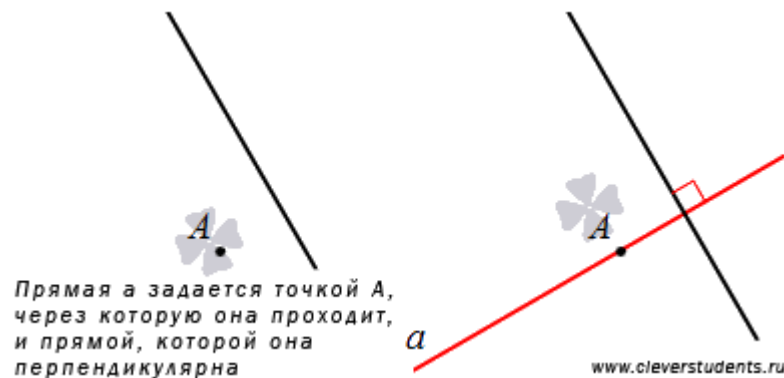
В-третьих, прямую можно задать, если указать точку, через которую она проходит, и ее направляющий вектор.

Если прямая линия задана в прямоугольной системе координат таким способом, то легко составить ее каноническое уравнение прямой на плоскости и параметрические уравнения прямой на плоскости.



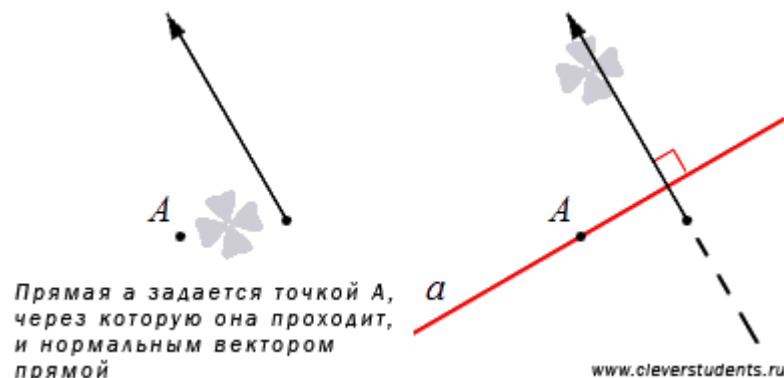
Четвертый способ задания прямой заключается в том, что следует указать точку, через которую она проходит, и прямую, которой она перпендикулярна. Действительно, через заданную точку плоскости проходит единственная прямая, перпендикулярная данной прямой. Оставим этот факт без доказательства.

Смотрите также материал статьи уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданной прямой.



Наконец, прямую на плоскости можно задать, указав точку, через которую она проходит, и нормальный вектор прямой.

Если известны координаты точки, лежащей на заданной прямой, и координаты нормального вектора прямой, то есть возможность записать общее уравнение прямой.



Уравнение прямой на плоскости - определение.

Пусть на плоскости зафиксирована прямоугольная декартова система координат Oxy и в ней задана прямая линия.

Прямая, как и любая другая геометрическая фигура, состоит из точек. В фиксированной прямоугольной системе координат каждая точка прямой имеет свои координаты – абсциссу и ординату. Так вот зависимость между абсциссой и ординатой каждой точки прямой в фиксированной системе координат, может быть задана уравнением, которое называют уравнением прямой на плоскости.

Другими словами, **уравнение прямой на плоскости** в прямоугольной системе координат Oxy есть некоторое уравнение с двумя переменными x и y , которое обращается в тождество при подстановке в него координат любой точки этой прямой.

Осталось разобраться с вопросом, какой вид имеет уравнение прямой на плоскости. Ответ на него содержится в следующем пункте статьи. Забегая вперед, отметим, что существуют различные формы записи уравнения прямой, что объясняется спецификой решаемых задач и способом задания прямой линии на плоскости. Итак, приступим к обзору основных видов уравнения прямой линии на плоскости.

Общее уравнение прямой.

Вид уравнения прямой в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости задает следующая теорема.

Теорема.

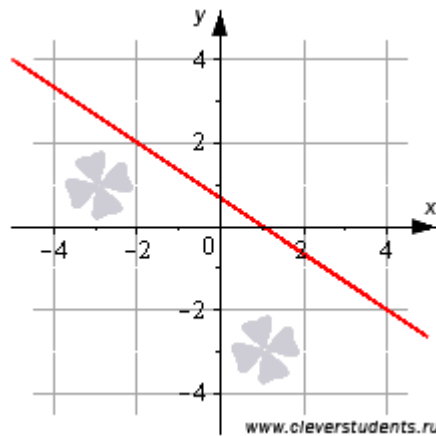
Всякое уравнение первой степени с двумя переменными x и y вида $Ax + By + C = 0$, где A , B и C – некоторые действительные числа, причем A и B одновременно не равны нулю, задает прямую линию в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости, и всякая прямая на плоскости задается уравнением вида $Ax + By + C = 0$.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называется **общим уравнением прямой** на плоскости.

Поясним смысл теоремы.

Заданному уравнению вида $Ax + By + C = 0$ соответствует прямая на плоскости в данной системе координат, а прямой линии на плоскости в данной системе координат соответствует уравнение прямой вида $Ax + By + C = 0$.

Посмотрите на чертеж.



С одной стороны можно сказать, что эта линия определяется общим уравнением прямой вида $2x + 3y - 2 = 0$, так как координаты любой точки изображенной прямой удовлетворяют этому уравнению. С другой стороны, множество точек плоскости, определяемых уравнением $2x + 3y - 2 = 0$, дают нам прямую линию, приведенную на чертеже.

Общее уравнение прямой называется **полным**, если все числа A , B и C отличны от нуля, в противном случае общее уравнение прямой называется **неполным**. Неполное уравнение прямой вида $Ax + By = 0$ определяют прямую, проходящую через начало координат. При $A=0$ уравнение $Ax + By + C = 0$ задает прямую, параллельную оси абсцисс Ox , а при $B=0$ – параллельную оси ординат Oy .

Таким образом, любую прямую на плоскости в заданной прямоугольной системе координат Oxy можно описать с помощью общего уравнения прямой при некотором наборе значений чисел A , B и C .

Нормальный вектор прямой, заданной общим уравнением прямой вида $Ax + By + C = 0$, имеет координаты (A, B) .

Все уравнения прямых, которые приведены в следующих пунктах этой статьи, могут быть получены из общего уравнения прямой, а также могут быть обратно приведены к общему уравнению прямой.

Рекомендуем к дальнейшему изучению статью общее уравнение прямой. Там доказана теорема, сформулированная в начале этого пункта статьи, приведены графические иллюстрации, подробно разобраны решения примеров на составление общего уравнения прямой, показан переход от общего уравнения прямой к уравнениям другого вида и обратно, а также рассмотрены другие характерные задачи.

Уравнение прямой в отрезках.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

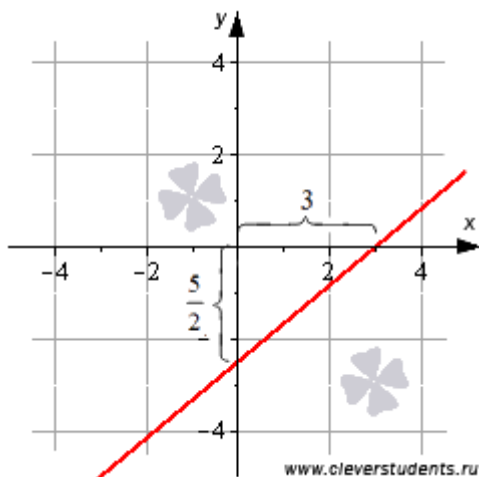
Уравнение прямой вида $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b – некоторые действительные числа отличные от нуля, называется **уравнением прямой в отрезках**. Это название не случайно, так как абсолютные величины чисел a и b равны длинам отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях Ox и Oy соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат). Таким образом, уравнение прямой в отрезках позволяет легко строить эту прямую на чертеже. Для этого следует отметить в прямоугольной системе координат на плоскости точки с координатами $(a, 0)$ и $(0, b)$, и с помощью линейки соединить их прямой линией.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-\frac{5}{2}} = 1$$

Для примера построим прямую линию, заданную уравнением в отрезках вида . Отмечаем

$$(3, 0), \left(0, -\frac{5}{2}\right)$$

точки и соединяем их.



Детальную информацию об этом виде уравнения прямой на плоскости Вы можете получить в статье [уравнение прямой в отрезках](#).

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

$$y = k \cdot x + b$$

Уравнение прямой вида , где x и y - переменные, а k и b – некоторые действительные числа, называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом** (k – угловой коэффициент). Уравнения прямой с угловым коэффициентом нам хорошо известны из курса алгебры средней школы. Такой вид уравнения прямой очень удобен для исследования, так как переменная y представляет собой явную функцию аргумента x .

Определение углового коэффициента прямой дается через определение угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox .

Определение.

Углом наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс в данной прямоугольной декартовой системе

координат Oxy называют угол α , отсчитываемый от положительного направления оси Ox до данной прямой против хода часовой стрелки.

Если прямая параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, то угол ее наклона считают равным нулю.

Определение.

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

Угловой коэффициент прямой есть тангенс угла наклона этой прямой, то есть,

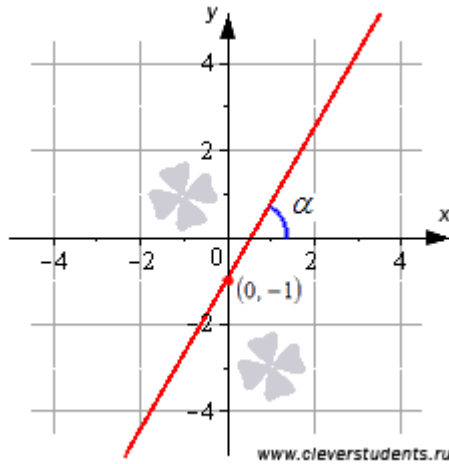
Если прямая параллельна оси ординат, то угловой коэффициент обращается в бесконечность (в этом случае также говорят, что угловой коэффициент не существует). Другими словами, мы не можем написать уравнение прямой с угловым коэффициентом для прямой, параллельной оси Oy или совпадающей с ней.

Заметим, что прямая, определяемая уравнением $y = k \cdot x + b$, проходит через точку $(0, b)$ на оси ординат.

Таким образом, уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = k \cdot x + b$ определяет на плоскости прямую, проходящую через точку $(0, b)$ и образующую угол α с положительным направлением оси абсцисс, причём $k = \operatorname{tg} \alpha$.

В качестве примера изобразим прямую, определяемую уравнением вида $y = \sqrt{3} \cdot x - 1$. Эта прямая проходит через

точку $(0, -1)$ и имеет наклон $\alpha = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ радиан (60 градусов) к положительному направлению оси Ox . Ее угловой коэффициент равен $\sqrt{3}$.



Отметим, что уравнение касательной к графику функции в точке очень удобно искать именно в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом.

Рекомендуем продолжить изучение этой темы в разделе уравнение прямой с угловым коэффициентом. Там представлена более подробная информация, приведены графические иллюстрации, детально разобраны решения характерных примеров и задач.

Каноническое уравнение прямой на плоскости.

Каноническое уравнение прямой на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат Oxy имеет

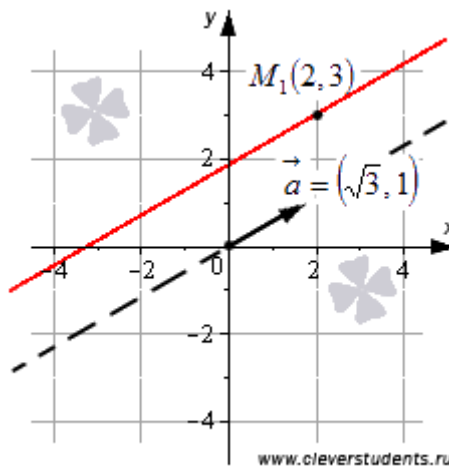
вид $\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y}$, где x_1, y_1, a_x и a_y – некоторые действительные числа, причем a_x и a_y одновременно не равны нулю.

Очевидно, что прямая линия, определяемая каноническим уравнением прямой, проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$. В свою очередь числа a_x и a_y , стоящие в знаменателях дробей, представляют собой координаты направляющего вектора этой прямой.

Таким образом, каноническое уравнение прямой $\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y}$ в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости соответствует прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a} = (a_x, a_y)$.

Для примера изобразим на плоскости прямую линию, соответствующую каноническому уравнению прямой

вида $\frac{x - 2}{\sqrt{3}} = \frac{y - 3}{1}$. Очевидно, что точка $M_1(2, 3)$ принадлежит прямой, а вектор $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$ является направляющим вектором этой прямой.



Каноническое уравнение прямой вида $\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y}$ используют даже тогда, когда одно из чисел a_x или a_y равно нулю.

В этом случае запись $\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y}$ считают условной (так как содержится ноль в знаменателе) и ее следует понимать

как $a_y(x - x_1) = a_x(y - y_1)$. Если $a_x = 0$, то каноническое уравнение принимает вид $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{a_y}$ и

определяет прямую, параллельную оси ординат (или совпадающую с ней). Если $a_y = 0$, то каноническое уравнение прямой

принимает вид $\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{0}$ и определяет прямую, параллельную оси абсцисс (или совпадающую с ней).

Детальная информация об уравнении прямой в каноническом виде, а также подробные решения характерных примеров и задач собраны в статье [каноническое уравнение прямой на плоскости](#).

Параметрические уравнения прямой на плоскости.

Параметрические уравнения прямой на плоскости имеют вид $\begin{cases} x = x_1 + a_x \cdot \lambda \\ y = y_1 + a_y \cdot \lambda \end{cases}$, где x_1, y_1, a_x и a_y – некоторые

действительные числа, причем a_x и a_y одновременно не равны нулю, а λ – параметр, принимающий любые действительные значения.

Параметрические уравнения прямой устанавливают неявную зависимость между абсциссами и ординатами точек прямой линии с помощью параметра λ (отсюда и название этого вида уравнений прямой).

Пара чисел (x, y) , которые вычисляются по параметрическим уравнениям прямой при некотором действительном значении параметра λ , представляет собой координаты некоторой точки прямой. К примеру,

при $\lambda = 0$ имеем $\begin{cases} x = x_1 + a_x \cdot 0 \\ y = y_1 + a_y \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$, то есть, точка с координатами (x_1, y_1) лежит на прямой.

Следует отметить, что коэффициенты a_x и a_y при параметре λ в параметрических уравнениях прямой являются координатами направляющего вектора этой прямой.

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \cdot \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$$

Для примера приведем параметрические уравнения прямой вида

. Эта прямая в прямоугольной системе

$$\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$$

координат Oxy на плоскости проходит через точку с координатами

$$(x_1, y_1)$$

и имеет направляющий вектор

В статье [параметрические уравнения прямой на плоскости](#) Вы можете ознакомиться с подробным решением примеров и задач по этой теме.

Нормальное уравнение прямой.

$$Ax + By + C = 0 \quad \vec{n} = (A, B)$$

Если в общем уравнении прямой вида

числа A , B и C таковы, что длина вектора

равна

единице, а $C \leq 0$,

то это общее уравнение прямой называется **нормальным уравнением прямой**. Нормальное уравнение прямой

$$\vec{n} = (A, B)$$

определяет в прямоугольной системе координат Oxy прямую линию, нормальным вектором которой является вектор

$$\vec{n} = (A, B)$$

причем эта прямая проходит на расстоянии

$$|C|$$

от начала координат в направлении вектора

$$\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y - p = 0$$

Часто можно видеть другую форму записи нормального уравнения прямой:

где $\cos \alpha$ и $\cos \beta$

- действительные числа, представляющие собой направляющие косинусы нормального вектора прямой

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} = 1$$

единичной длины (то есть,

и справедливо равенство

), а

величина p ($p \geq 0$) равна расстоянию от начала координат до прямой.

$$-\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y - 3 = 0$$

Для примера приведем общее уравнение прямой

. Это общее уравнение прямой является

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

нормальным уравнением прямой, так как

прямоугольной системе координат Oxy на плоскости задает прямую линию, нормальный вектор которой имеет

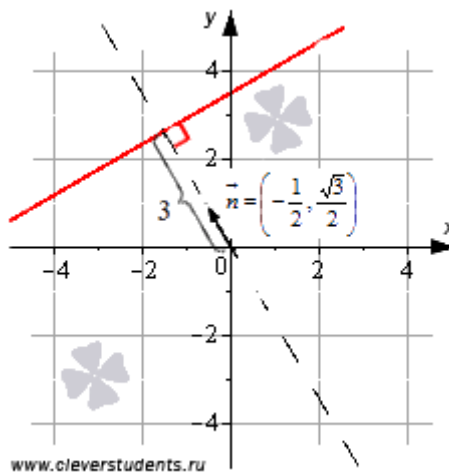
и $C = -3 \leq 0$. Оно в

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

координаты, и эта прямая удаленна от начала координат на 3 единицы в направлении нормального

$$\vec{n} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

вектора



Отметим, что уравнение прямой в нормальном виде позволяет находить расстояние от точки до прямой на плоскости.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ числа A , B и C таковы, что уравнение $Ax + By + C = 0$ не является нормальным уравнением прямой, то его можно привести к нормальному виду. Об этом читайте в статье [нормальное уравнение прямой](#).

Список литературы.

- Мордкович А.Г. Алгебра. 7 класс. Часть 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений.
- Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия. 7 – 9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений.
- Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Киселева Л.С., Позняк Э.Г. Геометрия. Учебник для 10-11 классов средней школы.
- Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Том первый: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия.