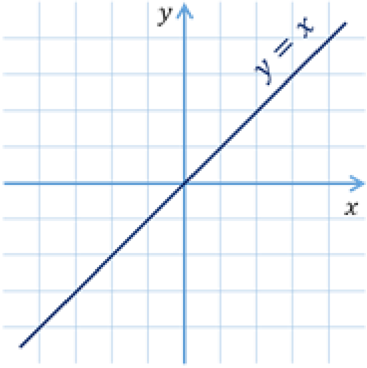
Степенная функция. Графики степенной функции.

1. Посмотреть видеоурок https://youtu.be/6mQg9-38B4E
2. Списать теорию

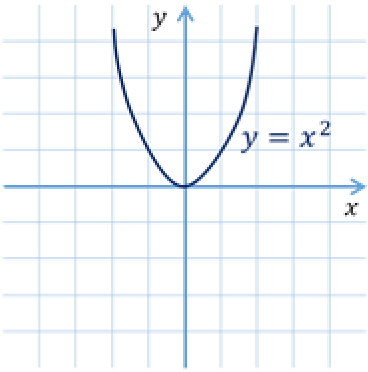
Степенной функцией называется функция вида $y = x^p$, где $\boldsymbol{p}$ — *заданное действительное число*. Вы уже знакомы с частными случаями ***степенных функций***, когда $\boldsymbol{p}$ является *натуральным* или *целым* числом, например, с такими функциями, как $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$….
Давайте вспомним, как выглядят графики этих функций.

Итак, если $p = 1$, то есть имеем функцию $y = x$

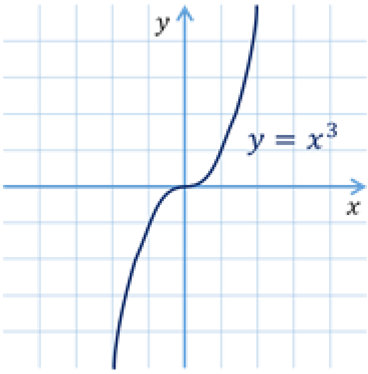
Графиком этой функции будет *прямая*, проходящая через начало координат.



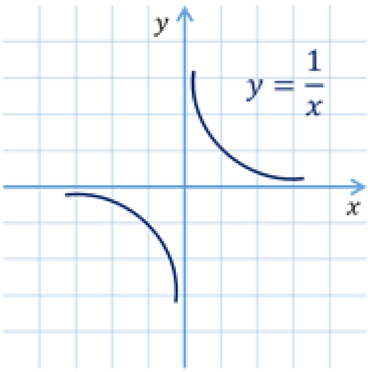
Если p — чётное число ($p = 2n$), то графиком функции является *парабола*.



Графиком функции $y = x^p$, при нечётном p ($p = 2n + 1$),
является *кубическая парабола*.

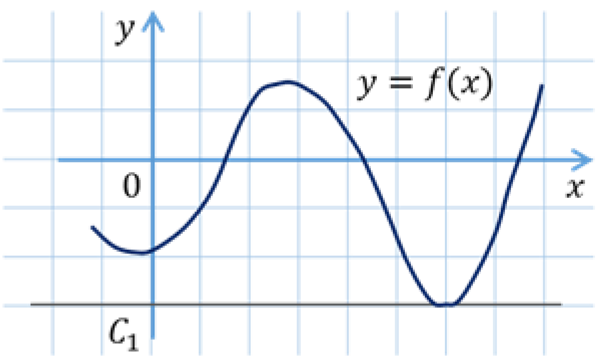


Если $p < 0$, то $y = x^{-p} = \frac{1}{x^p}$. Графиком этой функции является гипербола.

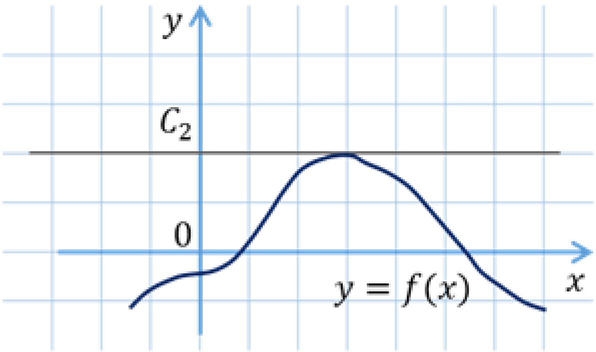


Свойства ***степенной функции*** напрямую зависят от свойств *степени с действительным показателем* и в частности от того, при каких значениях x и p имеет смысл x^p.
Давайте рассмотрим некоторые свойствами функций, которыми обладают, в частности, отдельные степенные функции.

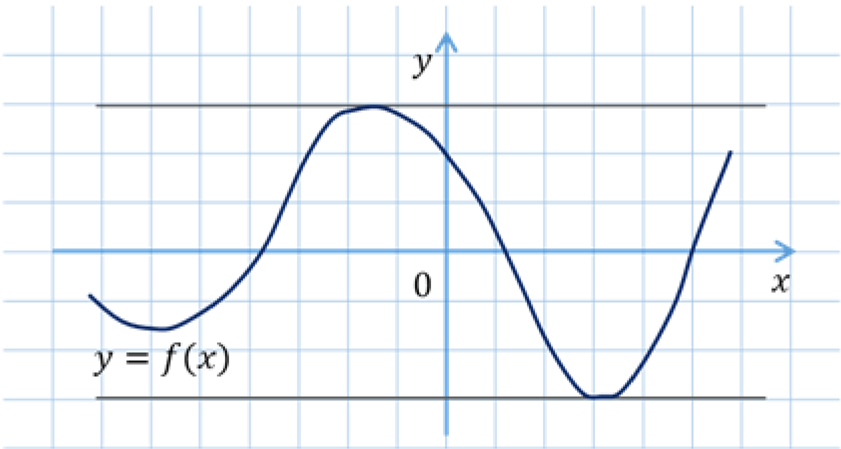
Итак, функция $y = f(x)$, определённая на множестве X большое,
называется ***ограниченной снизу*** на множестве X, если существует число C_1 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq C_1$.
Как же это понимать? Это означает, что все точки графика ограниченной снизу функции $y = f(x)$, где $x \in X$, расположены выше прямой игрек равно C_1 или на этой прямой.



Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X большое, называется ***ограниченной сверху*** на множестве X большое, если существует число C_2 такое, что для любого $x \in X$, выполняется неравенство $f(x) \le C_2$.
В этом случае все точки графика функции $y = f(x)$, где $x \in X$, лежат ниже прямой игрек равно C_2 или на этой прямой.



Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве икс большое, называют ***ограниченной*** на этом множестве.
Функция $y = f(x)$ является ограниченной на множестве X тогда и только тогда, когда существует положительное число $C > 0$ такое, что для любого большое $x \in X$, выполняется неравенство $|f(x)| \le C$.



Ещё вам нужно знать, что если существует такое значение x_0 из области определения множества X функции $y = f(x)$, что для любого x из этой области справедливо неравенство $f(x) \ge f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

Если же существует такое значение x_0 из области определения множества X функции $y = f(x)$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, то говорят, $y = f(x)$ принимает наибольшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$..

А теперь давайте более подробно рассмотрим ***свойства степенной функции*** в зависимости от показателя степени p.

Случай 1. Показатель $p = 2n$ *— чётное натуральное число.*

В этом случае ***степенная функция*** $y = x^{2n}$, где n *— натуральное число*, обладает следующими свойствами:

— область определения — все действительные числа, то есть множество действительных чисел $\mathbb{R}$;

— множество значений — неотрицательные числа, то есть $y \geq 0$;

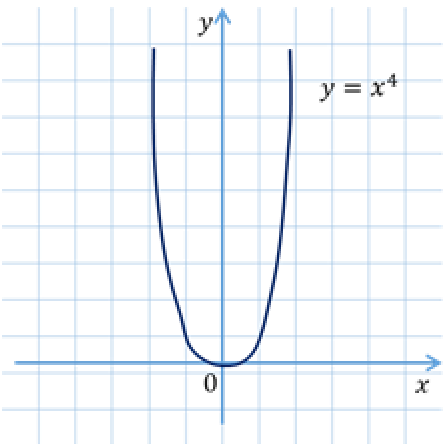
— функция $y = x^{2n}$ чётная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;

— функция является убывающей на промежутке $x \leq 0$ и возрастающей на промежутке $x \geq 0$;

— функция ограничена снизу, так как $x^{2n} \geq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

График функции $y = x^{2n}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^4$, или $y = x^6$ и так далее. График этой функции называют ***параболой n-й степени***.



Случай 2. Показатель $p = 2n - 1$ *— нечётное натуральное число.*

В этом случае ***степенная функция*** $y = x^{2n-1}$, где n *— натуральное число*, обладает следующими свойствами:

— область определения — множество действительных чисел;

— множество значений — множество действительных чисел;

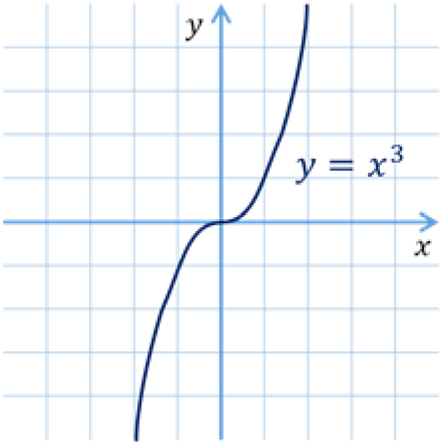
— функция $y = x^{2n-1}$ нечётная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$;

— функция является возрастающей на всей действительной оси;

— функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу;

— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

График функции $y = x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^3$. График этой функции называют ***кубической параболой***.



Случай 3. ***Показатель*** $p = -2n$, *где* n *— натуральное число.*

В этом случае ***степенная функция*** $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, обладает следующими свойствами:

— область определения — множество действительных чисел, кроме $x = 0$;

— множество значений — положительные числа $y > 0$;

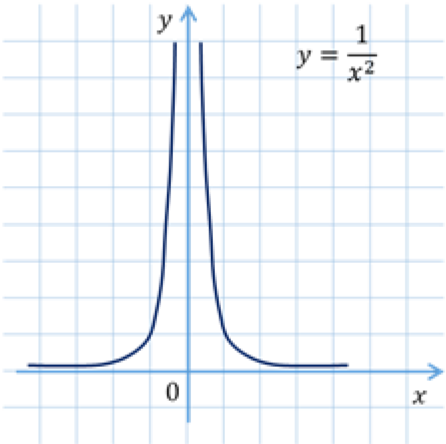
— функция $y = \frac{1}{x^{2n}}$, чётная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}}$;

— функция является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$;

— функция ограничена снизу, так как $y > 0$;

— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

График функции имеет такой же вид, как, например, график функции $y = \frac{1}{x^2}$.



Прямую $y = 0$ (ось абсцисс) называют ***горизонтальной асимптотой*** (от греческого слова asymptotes, что переводится как «несовпадающий») графика функции $y = x^{-2n}$, при $n \in \mathbb{N}$. Прямую $x = 0$ (ось ординат) называют ***вертикальной асимптотой*** графика этой функции $y = x^{-2n}$, так как при значениях x, близких к 0, расстояния от точек этого графика до оси Oy (прямой $x = 0$) становятся сколь угодно малыми.

Случай 4. Показатель $\boldsymbol{p = -(2n-1)}$*, где* n *— натуральное число.*

В этом случае ***степенная функция*** $\boldsymbol{y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}}$, где $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$, обладает следующими свойствами:

— область определения — множество действительных чисел, кроме $\boldsymbol{x = 0}$;

— множество значений — множество действительных чисел, кроме $\boldsymbol{y = 0}$;

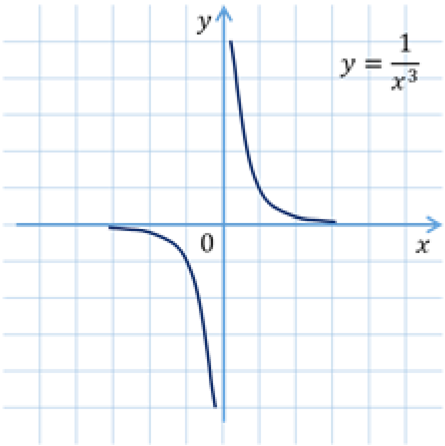
— функция $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^{2n-1}}}$, нечётная, так как как $\boldsymbol{\frac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-1}}}$;

— функция является убывающей на промежутках $\boldsymbol{x < 0}$ и $\boldsymbol{x > 0}$;

— функция не является ограниченной;

— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

График функции $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^{2n-1}}}$, имеет такой же вид, как, например, график функции $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^3}}$.



Ось абсцисс является ***горизонтальной асимптотой***, а ось ординат — ***вертикальной асимптотой*** графика функции.

Случай 5. Показатель p — положительное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество неотрицательных чисел $x \geq 0$;

— множество значений — множество неотрицательных чисел $y \geq 0$;

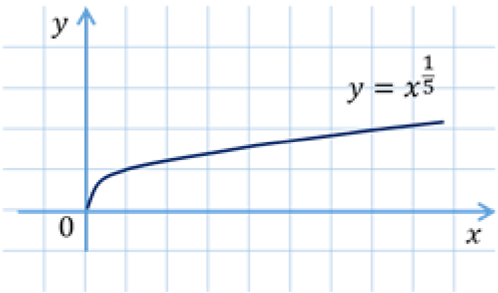
— функция является возрастающей на промежутке $x \geq 0$;

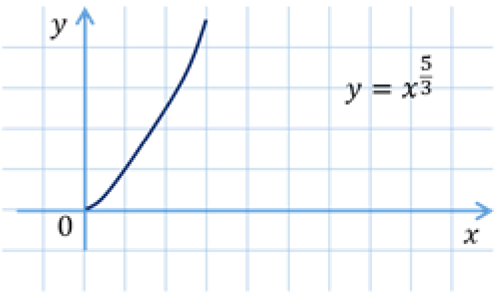
— функция не является ни чётной, ни нечётной;

— функция ограничена снизу, так как $y \geq 0$;

— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

График функции $y = x^p$, где p — положительное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{\frac{1}{5}}$ (при $0 < p < 1$) или как, например, график функции $y = x^{\frac{5}{3}}$ (при $p > 1$).





Случай 6. Показатель p — отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество положительных чисел $x > 0$;

— множество значений — множество положительных чисел $y > 0$;

— функция является убывающей на промежутке $x > 0$;

— функция не является ни чётной, ни нечётной;

— функция ограничена снизу, так как $\boldsymbol{y} > 0$.