Добрый день,
Прочитайте, разберитесь и основное законспектируйте.
Приготовьтесь к практической работе.

удобно взять информацию из
http://mathprofi.ru/vyrazhenija_uravnenija_i_sistemy_s_%20kompleksnymi_chislami.html

Выражения, уравнения и системы уравнений с комплексными числами

Сегодня на занятии мы отработаем типовые действия с комплексными числами, а также освоим технику решения выражений, уравнений и систем уравнений, которые эти числа содержат. Данный практикум является продолжением урока **Комплексные числа для чайников**, и поэтому если вы неважно ориентируетесь в теме, то, пожалуйста, пройдите по указанной выше ссылке. Ну а более подготовленным читателям предлагаю сразу же разогреться:

Пример 1

Упростить выражение $\frac{(-1+3i)z+\sqrt{3}(7-i)}{-2z^2+(-1-7i)}$, если $z=-2+i$. Представить результат в тригонометрической форме и изобразить его на комплексной плоскости.

Решение: итак, требуется подставить $z=-2+i$ в «страшную» дробь, провести упрощения, и перевести полученное **комплексное число** в **тригонометрическую форму**. Плюс чертёж.

Как лучше оформить решение? С «навороченным» алгебраическим выражением выгоднее разбираться поэтапно. Во-первых, меньше рассеивается внимание, и, во-вторых, если таки задание не зачтут, то будет намного проще отыскать ошибку.

1) Сначала упростим числитель. Подставим в него значение $z=-2+i$, раскроем скобки и поправим причёску:

$$(-1+3i)(-2+i)+\sqrt{3}(7-i)=2-6i-i-3+7\sqrt{3}-\sqrt{3}i=-1+7\sqrt{3}+(-7-\sqrt{3})i$$

…Да, такой вот Квазимодо от комплексных чисел получился…

Напоминаю, что в ходе преобразований используются совершенно бесхитростные вещи – правило умножения многочленов и уже ставшее банальным равенство $i^2=-1$. Главное, быть внимательным и не запутаться в знаках.

2) Теперь на очереди знаменатель. Если $z=-2+i$, то:

$$-2z^2+(-1-7i)=-2(-2+i)^2-1-7i=-2((-2)^2+2\cdot(-2)\cdot i+i^2)-1-7i=$$
$$=-2(4-4i-1)-1-7i=-6+8i-1-7i=-7+i$$

Заметьте, в какой непривычной интерпретации использована **формула квадрата суммы** $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Как вариант, здесь можно выполнить перестановку $(-2+i)^2=(i-2)^2$ под формулу $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Результаты, естественно, совпадут.

3) И, наконец, всё выражение. Если $z=-2+i$, то:

$$\frac{(-1+3i)z+\sqrt{3}(7-i)}{-2z^2-1-7i}=\frac{(-1+3i)(-2+i)+\sqrt{3}(7-i)}{-2(-2+i)^2-1-7i}=\frac{-1+7\sqrt{3}+(-7-\sqrt{3})i}{-7+i}=(*)$$

Чтобы избавиться от дроби, умножим числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю выражение. При этом в целях применения **формулы разности квадратов** $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ следует предварительно *(и уже обязательно!)* поставить отрицательную действительную часть на 2-е место: $-7+i=i-7$

А сейчас ключевое правило:

НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ НЕ ТОРОПИМСЯ! Лучше перестраховаться и прописать лишний шаг.
В выражениях, уравнениях и системах с комплексными числами самонадеянные устные вычисления **чреваты, как никогда**!

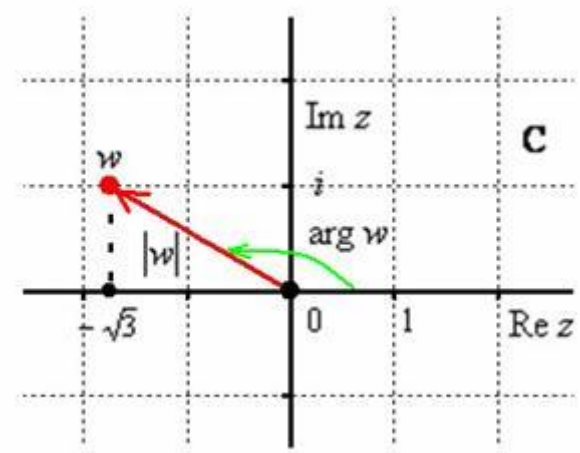
$$(*)=\frac{-1+7\sqrt{3}+(-7-\sqrt{3})i}{i-7}=\frac{(-1+7\sqrt{3}+(-7-\sqrt{3})i)(7+i)}{(i-7)(i+7)}=$$
$$=\frac{7(-1+7\sqrt{3})+7(-7-\sqrt{3})i+(-1+7\sqrt{3})i-(-7-\sqrt{3})}{i^2-49}=$$
$$=\frac{-7+49\sqrt{3}+(-49-7\sqrt{3})i+(-1+7\sqrt{3})i+7+\sqrt{3}}{-1-49}=$$
$$=\frac{-7+49\sqrt{3}+7+\sqrt{3}+(-49-7\sqrt{3}-1+7\sqrt{3})i}{-50}=\frac{50\sqrt{3}-50i}{-50}=-\sqrt{3}+i$$

На завершающем шаге произошло хорошее сокращение и это просто отличный признак.

***Примечание**: строго говоря, здесь произошло деление комплексного числа $50\sqrt{3}-50i$ на комплексное число 50 (вспоминаем, что $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$). Об этом нюансе я умалчивал до сих пор и о нём мы ещё поговорим чуть позже.*

Обозначим наше достижение буквой $w=-\sqrt{3}+i$

Представим полученный результат в тригонометрической форме. Вообще говоря, здесь можно обойтись без чертежа, но коль скоро, требуется – несколько рациональнее выполнить его прямо сейчас:



Вычислим модуль комплексного числа:

$$|w| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Если выполнять чертёж в масштабе 1 ед. = 1 см (2 тетрадные клетки), то полученное значение легко проверить с помощью обычной линейки.

Найдём аргумент. Так как число расположено во 2-й координатной четверти $(a < 0, b > 0)$, то:

$$\arg w = \pi + arctg\frac{b}{a} = \pi + arctg\frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad (150^\circ)$$

Угол элементарно проверяется транспортиром. Вот в чём состоит несомненный плюс чертежа.

Таким образом: $w = |w| \cdot (\cos(\arg w) + i\sin(\arg w)) = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ – искомое число в тригонометрической форме.

Выполним проверку:

$$2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

, в чём и требовалось убедиться.

Незнакомые значения синуса и косинуса удобно находить по **тригонометрической таблице**.

Ответ: $-\sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Пример 2

Упростить выражение $\frac{(8-i) + (-1+2i)z}{(-1+i)z^2 + (-6-9i)}$, где $z = -3 + 2i$. Изобразить полученное число на комплексной плоскости и записать его в показательной форме.

Постарайтесь не пропускать учебные примеры. Кажутся-то они, может быть, и простыми, но без тренировки «сесть в лужу» не просто легко, а очень легко. Поэтому «набиваем руку».

Краткое решение и ответ в конце урока.

Нередко задача допускает не единственный путь решения:

Пример 3

Вычислить $(z_1 \cdot z_2)^{10}$, если $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = \frac{1}{4}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

Решение: прежде всего, обратим внимание на оригинальное условие – одно число представлено в алгебраической, а другое – в тригонометрической форме, да ещё и с градусами. Давайте сразу перепишем его в более привычном виде: $z_2 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$.

В какой форме проводить вычисления? Выражение $(z_1 \cdot z_2)^{10}$, очевидно, предполагает первоочередное умножение и дальнейшее возведение в 10-ю степень по **формуле Муавра**, которая сформулирована для тригонометрической формы комплексного числа. Таким образом, представляется более логичным преобразовать первое число. Найдём его модуль и аргумент:

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi_1 = \pi + arctg\frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Используем правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

если $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1), z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$, то

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

В нашем случае:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

Далее применяем формулу Муавра $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$, которая является следствием указанного выше правила:

$$(z_1 \cdot z_2)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\cos\left(10 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(10 \cdot \frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2^{10}} \cdot \left(\cos\frac{25\pi}{3} + i \sin\frac{25\pi}{3}\right)$$

Делая дробь $\frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ правильной, приходим к выводу, что можно «скрутить» 4 оборота *(8π рад.)*:

$$(z_1 \cdot z_2)^{10} = \frac{1}{2^{10}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Готово.

Второй способ решения состоит в том, чтобы перевести 2-е число в алгебраическую форму $z_2=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{i}{8}$, выполнить умножение в алгебраической форме, перевести результат $z_1\cdot z_2$ в тригонометрическую форму и воспользоваться формулой Муавра.

Как видите, одно «лишнее» действие. Желающие могут довести решение до конца и убедиться, что результаты совпадают.

В условии ничего не сказано о форме итогового комплексного числа, поэтому:

Ответ: $(z_1\cdot z_2)^{10}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Но «для красоты» либо по требованию результат нетрудно представить и в алгебраической форме:

$$\frac{1}{2^{10}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{2^{11}}+\frac{\sqrt{3}}{2^{11}}i$$

Самостоятельно:

Пример 4

Упростить выражение $\left(\frac{-1+\frac{i}{4}}{\frac{1}{2}+2i}\right)^{-3}$

Здесь нужно вспомнить **действия со степенями**, хотя одного полезного правила в методичке нет, вот оно: $\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}=\frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}$.

И ещё одно важное замечание: пример можно решить в двух стилях. Первый вариант – работать с *двумя* числами и мириться с дробями. Второй вариант – представить каждое число в виде *частного двух чисел*: $-1+\frac{i}{4}=\frac{-4+i}{4}$, $\frac{1}{2}+2i=\frac{1+4i}{2}$ и **избавиться от четырёхэтажности**. С формальной точки зрения без разницы, как решать, но содержательное отличие есть! Пожалуйста, хорошо осмыслите:

$\frac{1}{2}+2i$ – это комплексное число;

$\frac{1+4i}{2}$ – это частное двух комплексных чисел ($z_1=1+4i$ и $z_2=2$), однако в зависимости от контекста можно сказать и так: число $\frac{1}{2}+2i$, представленное в виде частного двух комплексных чисел.

Краткое решение и ответ в конце урока.

Выражения – хорошо, а уравнения – лучше:

Уравнения с комплексными коэффициентами

Чем они отличаются от **«обычных» уравнений**? Коэффициентами =)

В свете вышеприведённого замечания начнём с этого примера:

Пример 5

Решить уравнение $\frac{3+4i}{z}+\frac{4-i}{3+2i}=\frac{62-50i}{13}$

И незамедлительная преамбула по «горячим следам»: **изначально** правая часть уравнения позиционируется, как частное двух комплексных чисел ($62-50i$ и 13), и поэтому будет нехорошим тоном переписать условие с числом $\frac{62}{13}-\frac{50}{13}i$ *(хотя это и не повлечёт ошибки)*. Более явственно данное различие, кстати, просматривается в дроби $\frac{3+4i}{z}$ – если, условно говоря, $z=13$, то это значение в первую очередь понимается как **«полноценный» комплексный корень уравнения**, а не как делитель числа $3+4i$, и тем более – не как часть числа $\frac{3}{13}+\frac{4}{13}i$!

Решение, в принципе, тоже можно оформить пошагово, но в данном случае овчинка выделки не стОит. Первоначальная задача состоит в том, чтобы упростить всё, что не содержит неизвестной «зет», в результате чего уравнение сведётся к виду $\frac{\alpha}{z}=\beta$:

Уверенно упрощаем среднюю дробь:

$$\frac{3+4i}{z}+\frac{(4-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{62-50i}{13}$$

$$\frac{3+4i}{z}+\frac{12-3i-8i-2}{13}=\frac{62-50i}{13}$$

$$\frac{3+4i}{z}+\frac{10-11i}{13}=\frac{62-50i}{13}$$

Результат переносим в правую часть и находим разность:

$$\frac{3+4i}{z}=\frac{62-50i}{13}-\frac{10-11i}{13}$$

$$\frac{3+4i}{z}=\frac{62-50i-10+11i}{13}$$

***Примечание**: и вновь обращаю ваше внимание на содержательный момент – здесь мы не вычли из числа число, а подвели дроби к общему знаменателю! Следует отметить, что уже в ХОДЕ решения не возбраняется работать и с числами: $\frac{62}{13}-\frac{50}{13}i-\left(\frac{10}{13}-\frac{11}{13}i\right)$, правда, в рассматриваемом примере такой стиль скорее вреден, чем полезен =)*

$$\frac{3+4i}{z}=\frac{52-39i}{13}$$

$$\frac{3+4i}{z}=4-3i \quad \left(\frac{\alpha}{z}=\beta\right)$$

По правилу пропорции выражаем «зет»:

$$z=\frac{3+4i}{4-3i}$$

Теперь можно снова разделить и умножить на сопряжённое выражение, но подозрительно похожие числа числителя и знаменателя подсказывают следующий ход:

$$z=\frac{3+4i}{4-3i}=\frac{i(-3i+4)}{4-3i}=i$$

Ответ: $z=i$

В целях проверки подставим полученное значение $z=i$ в левую часть $\frac{3+4i}{z}+\frac{4-i}{3+2i}$ исходного уравнения и проведём упрощения:

$$\frac{3+4i}{i}+\frac{4-i}{3+2i}=\frac{(3+4i)\cdot i}{i\cdot i}+\frac{(4-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{3i-4}{-1}+\frac{12-3i-8i-2}{9+4}=4-3i+\frac{10-11i}{13}=$$

$$=\frac{13\cdot(4-3i)+10-11i}{13}=\frac{52-39i+10-11i}{13}=\frac{62-50i}{13}$$

– получена правая часть исходного уравнения, таким образом, корень $z=i$ найден верно.

…Сейчас-сейчас… подберу для вас что-нибудь поинтереснее… держите:

Пример 6

Решить уравнение

$$(-2+i)^2+\frac{2-3i}{-5+i}+zi^3=i^{10}$$

Данное уравнение сводится к виду $\alpha\cdot z=\beta$, а значит, является линейным. Намёк, думаю, понятен – дерзайте!

Конечно же… как можно без него прожить:

Квадратное уравнение с комплексными коэффициентами

На уроке **Комплексные числа для чайников** мы узнали, что квадратное уравнение с действительными коэффициентами может иметь сопряжённые комплексные корни, после чего возникает закономерный вопрос: а почему, собственно, сами коэффициенты не могут быть комплексными? Сформулирую общий случай:

Квадратное уравнение $az^2+bz+c=0 \quad (a\neq 0)$ с произвольными комплексными коэффициентами a, b, c *(1 или 2 из которых либо все три могут быть, в частности, и действительными)* имеет **два и только два** комплексных корня z_1, z_2 *(возможно один из которых либо оба действительны)*. При этом корни *(как действительные, так и с ненулевой мнимой частью)* могут совпадать (быть кратными).

Квадратное уравнение с комплексными коэффициентами решается по такой же схеме, что и **«школьное» уравнение**, с некоторыми отличиями в технике вычислений:

Пример 7

Найти корни квадратного уравнения
$iz^2+(3-2i)z-6=0$

Решение: на первом месте расположена мнимая единица, и, в принципе, от неё можно избавиться *(умножая обе части на i)*, однако, в этом нет особой надобности.

Для удобства выпишем коэффициенты:
$a=i,\quad b=3-2i,\quad c=-6$
Не теряем «минус» у свободного члена! …Может быть не всем понятно – перепишу уравнение в стандартном виде $az^2+bz+c=0$:
$iz^2+(3-2i)z+(-6)=0$

Вычислим дискриминант:
$D=b^2-4ac=(3-2i)^2-4\cdot i\cdot(-6)=3^2-2\cdot 3\cdot 2i+(2i)^2+24i=9-12i-4+24i=5+12i$

А вот и главное препятствие:
$\sqrt{D}=\sqrt{5+12i}$

Применение общей формулы извлечения корня *(см. последний параграф статьи **Комплексные числа для чайников**)* осложняется серьёзными затруднениями, связанными с аргументом подкоренного комплексного числа *(убедитесь сами)*. Но существует и другой, «алгебраический» путь! Корень будем искать в виде:
$\sqrt{5+12i}=x+yi$

Возведём обе части в квадрат:
$5+12i=(x+yi)^2$
$5+12i=x^2+2xyi-y^2$

Два комплексных числа равны, если равны их действительные и их мнимые части. Таким образом, получаем следующую систему:
$\begin{cases}x^2-y^2=5\\2xy=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=5\\xy=6\end{cases}$

Систему проще решить подбором *(более основательный путь – выразить из 2-го уравнения $y=\frac{6}{x}$ – подставить в 1-е, получить и решить биквадратное уравнение)*. Предполагая, что автор задачи не изверг, выдвигаем гипотезу, что x и y – целые числа. Из 1-го уравнения следуют, что «икс» **по модулю** больше, чем «игрек». Кроме того, положительное произведение $xy=6$ сообщает нам, что неизвестные одного знака. Исходя из вышесказанного, и ориентируясь на 2-е уравнение, запишем все подходящие

ему пары:

$x = 6, y = 1$

$x = -6, y = -1$

$x = 3, y = 2$

$x = -3, y = -2$

Очевидно, что 1-му уравнению системы удовлетворяют две последние пары, таким образом:

$\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = 3+2i$

$\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = -3-2i$

Не помешает промежуточная проверка:

$(3+2i)^2 = 9+12i-4 = 5+12i$

$(-3-2i)^2 = (-1)^2 \cdot (3+2i)^2 = 5+12i$

что и требовалось проверить.

В качестве «рабочего» корня можно выбрать **любое** значение. Понятно, что лучше взять версию без «минусов»: $\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = 3+2i$

Находим корни, не забывая, кстати, что $a = i$:

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(3-2i)-(3+2i)}{2i} = \frac{-3+2i-3-2i}{2i} = \frac{-6}{2i} = -\frac{3i}{i \cdot i} = -\frac{3i}{-1} = 3i$$

$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(3-2i)+(3+2i)}{2i} = \frac{-3+2i+3+2i}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

Ответ: $z_1 = 3i, \quad z_2 = 2$

Проверим, удовлетворяют ли найденные корни уравнению $iz^2 + (3-2i)z - 6 = 0$:

1) Подставим $z_1 = 3i$:

$i \cdot (3i)^2 + (3-2i) \cdot 3i - 6 = 0$

$-9i + 9i + 6 - 6 = 0$

$0 = 0$

верное равенство.

2) Подставим $z_2 = 2$:

$i \cdot 2^2 + (3-2i) \cdot 2 - 6 = 0$

$4i + 6 - 4i - 6 = 0$

$0 = 0$

верное равенство.

Таким образом, решение найдено правильно.

По мотивам только что разобранной задачи:

Пример 8

Найти корни z_0, z_1 уравнения $z = \sqrt{4i}$

Следует отметить, что квадратный корень из *чисто комплексного* числа прекрасно извлекается и с помощью общей формулы $z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right)$, где $n = 2, k = \{0; 1\}$, поэтому в образце приведены оба способа. Второе полезное замечание касается того, что предварительное извлечение корня из константы $z = \sqrt{4i} = 2\sqrt{i}$ ничуть не упрощает решение.

А теперь можно расслабиться – в этом примере вы отделаетесь лёгким испугом :)

Пример 9

Решить уравнение $z^2 + (3+2i)z - 5 + 3i = 0$ и выполнить проверку

Решения и ответы в конце урока.

Заключительный параграф статьи посвящён

системе уравнений с комплексными числами

Расслабились и… не напрягаемся =) Рассмотрим простейший случай – систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

Пример 10

Решить систему уравнений. Ответ представить в алгебраической и показательной формах, изобразить корни на чертеже.

$$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = -1+i \\ (1+2i)z_1 + (1-2i)z_2 = -4+i \end{cases}$$

Решение: уже само условие подсказывает, что система имеет единственное решение, то есть, нам нужно найти два числа z_1, z_2, которые удовлетворяют **каждому** уравнению системы.

Систему реально решить «детским» способом (***выразить одну переменную через другую***), однако гораздо удобнее использовать **формулы Крамера**. Вычислим *главный определитель* системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1+i) & (1-i) \\ (1+2i) & (1-2i) \end{vmatrix} = (1+i)(1-2i) - (1+2i)(1-i) = 1+i-2i+2-(1+2i-i+2) =$$

$= 3-i-(3+i) = 3-i-3-i = -2i \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

Повторюсь, что лучше не торопиться и прописывать шаги максимально подробно:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (-1+i) & (1-i) \\ (-4+i) & (1-2i) \end{vmatrix} = (-1+i)(1-2i) - (-4+i)(1-i) = -1+i+2i+2-(-4+i+4i+1) =$$

$$= 1+3i-(-3+5i) = 1+3i+3-5i = 4-2i$$

Домножаем числитель и знаменатель на мнимую единицу и получаем 1-й корень:

$$z_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4-2i}{-2i} = \frac{(4-2i)\cdot i}{-2i\cdot i} = \frac{4i+2}{2} = 1+2i$$

Аналогично:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (1+i) & (-1+i) \\ (1+2i) & (-4+i) \end{vmatrix} = (1+i)(-4+i) - (1+2i)(-1+i) = -4-4i+i-1-(-1-2i+i-2) =$$

$$= -5-3i-(-3-i) = -5-3i+3+i = -2-2i$$

$$z_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2-2i}{-2i} = \frac{(-1-i)\cdot i}{-i\cdot i} = \frac{-i+1}{1} = 1-i$$

Перед тем, как продолжать дальше, целесообразно проверить решение.

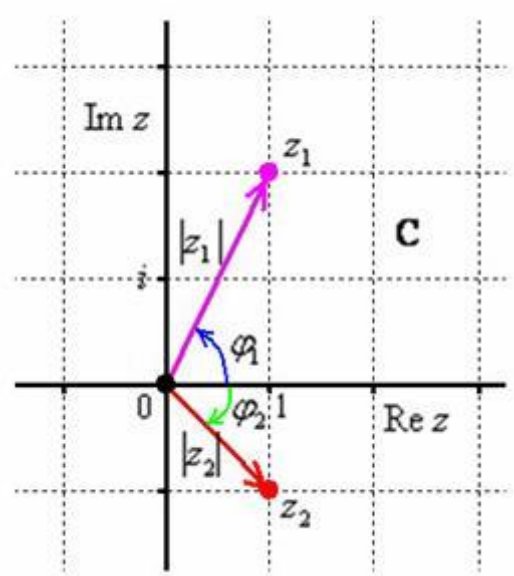
Подставим найденные значения $z_1 = 1+2i, \quad z_2 = 1-i$ в левую часть каждого уравнения системы:

1) $(1+i)z_1 + (1-i)z_2 = (1+i)(1+2i) + (1-i)(1-i) = 1+i+2i-2+1-i-i-1 = -1+i$

2) $(1+2i)z_1 + (1-2i)z_2 = (1+2i)(1+2i) + (1-2i)(1-i) = 1+2i+2i-4+1-2i-i-2 = -4+i$

Получены соответствующие правые части, ч.т.п.

Выполним чертёж:



Представим корни в показательной форме. Для этого нужно найти их модули и аргументы:

1) $|z_1| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}, \quad \varphi_1 = arctg\frac{2}{1} = arctg2$ – арктангенс «двойки» вычисляется «плохо», поэтому так и оставляем: $z_1 = |z_1|\cdot e^{i\varphi_1} = \sqrt{5}\cdot e^{i\cdot arctg2}$

2) $|z_2| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_2 = arctg\frac{-1}{1} = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z_2 = |z_2|\cdot e^{i\varphi_2} = \sqrt{2}\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Ответ:

$$\begin{cases} z_1 = 1+2i = \sqrt{5}\cdot e^{i\cdot arctg2} \\ z_2 = 1-i = \sqrt{2}\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \end{cases}$$

Задание повеселее:

Пример 11

Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(1+i)z_1+(-3-2i)z_2=20+4i\\(-1+2i)z_1+(2+5i)z_2=-19-9i\end{cases}$$

Найти произведение корней и представить его в тригонометрической форме.

Краткое решение совсем близко.

И в заключение ответим на экзистенциальный вопрос: для чего нужны комплексные числа? Комплексные числа нужны для ~~расширения сознания~~ выполнения заданий других разделов высшей математики, кроме того, они используются во вполне материальных инженерно-технических расчетах на практике.

На этом курс Опытного пользователя комплексных чисел завершён – сертификат вам на стену и новых достижений!

Решения и ответы:

*Пример 2: **Решение**: если* $z=-3+2i$ *, то:*

1) $(8-i)+(-1+2i)z=(8-i)+(-1+2i)(-3+2i)=8-i+3-6i-2i-4=7-9i;$

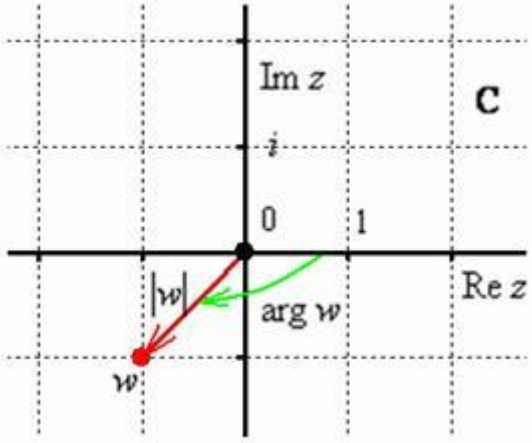
2) $(-1+i)z^2+(-6-9i)=(-1+i)(-3+2i)^2+(-6-9i)=(-1+i)(9-12i-4)-6-9i=$
$=(-1+i)(5-12i)-6-9i=-5+12i+5i+12-6-9i=1+8i;$

3) $\dfrac{(8-i)+(-1+2i)z}{(-1+i)z^2+(-6-9i)}=\dfrac{(8-i)+(-1+2i)(-3+2i)}{(-1+i)(-3+2i)^2+(-6-9i)}=\dfrac{7-9i}{1+8i}=(*)$

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое знаменателю выражение:

$$(*)=\frac{(7-9i)(1-8i)}{(1+8i)(1-8i)}=\frac{7-9i-56i-72}{1+64}=\frac{-65-65i}{65}=-1-i$$

Изобразим полученное число на чертеже:



Представим ответ в показательной форме. Найдем модуль и аргумент данного числа:

$$|w|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

Поскольку число расположено в 3-й четверти, то:

$$\arg w=-\pi+arctg\frac{-1}{-1}=-\pi+arctg1=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$$

Таким образом: $w = |w| \cdot e^{i \arg w} = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

***Ответ**:* $-1-i = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

Пример 4: ***Решение**:*

$$\left(\frac{-1+\frac{i}{4}}{\frac{1}{2}+2i}\right)^{-3} = \left(\frac{\frac{1}{2}+2i}{-1+\frac{i}{4}}\right)^{3} = \left(\frac{\frac{1+4i}{2}}{\frac{-4+i}{4}}\right)^{3} = \left(2 \cdot \frac{1+4i}{i-4}\right)^{3} = 8 \cdot \left(\frac{1+4i}{i-4}\right)^{3} = 8 \cdot \left(\frac{(1+4i)(i+4)}{(i-4)(i+4)}\right)^{3} =$$

$$= 8 \cdot \left(\frac{i-4+4+16i}{-1-16}\right)^{3} = 8 \cdot \left(\frac{17i}{-17}\right)^{3} = 8 \cdot (-i)^3 = 8 \cdot (-1)^3 \cdot i^3 = -8i^3 = -8i^2 \cdot i = -8 \cdot (-1) \cdot i = 8i$$

Пример 6: ***Решение**:*

$$(i-2)^2 + \frac{2-3i}{i-5} + zi \cdot i^2 = (i^2)^5$$

$$-1-4i+4+\frac{(2-3i)(i+5)}{(i-5)(i+5)} - zi = (-1)^5$$

$$3-4i+\frac{2i+3+10-15i}{-1-25} - zi = -1$$

$$\frac{13-13i}{-26} - zi = -1-3+4i$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{i}{2} - zi = -4+4i$$

$$-zi = -4+4i+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$$

$$-zi = -\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i$$

Умножим обе части уравнения на i *:*

$$-zi \cdot i = \left(-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i\right) \cdot i$$

$$-z \cdot (-1) = -\frac{7}{2}i - \frac{7}{2}$$

$$z = -\frac{7}{2} - \frac{7}{2}i$$

***Ответ**:*

Пример 8: ***Решение**:*

***Первый способ**: корни уравнения ищем в виде:*

$$\sqrt{4i} = x + yi$$

Возведём обе части в квадрат:

$$4i = (x+yi)^2$$

$$4i = x^2 + 2xyi - y^2$$

Комплексные числа равны, если равны их действительные и их мнимые части:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y) = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Из 1-го уравнения следует, что:
1) $y=-x$*, но это не удовлетворяет 2-му уравнению*
(равенство $xy=2$ *выполняется только в том случае, если* x *и* y *одного знака);*
2) $y=x$ *– подставим во 2-е уравнение:*

$$x\cdot x=2\Rightarrow x^2=2$$

Таким образом: $x=y=\sqrt{2}$ *либо* $x=y=-\sqrt{2}$

***Ответ**:* $z_0=\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\quad z_1=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

***Второй способ**: используем формулу* $z_k=\sqrt[n]{|w|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right)$.

В данном случае $w=4i,\quad n=2,\quad k=\{0;1\}$*:*

$$z_{k=0,1}=\sqrt{|w|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{2}\right)\right)$$

Найдём модуль и аргумент комплексного числа:

$|w|=\sqrt{0^2+4^2}=4$*;*

очевидно, что $\varphi=\frac{\pi}{2}$*.*

Таким образом:

$$z_0=\sqrt{4}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+0}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+0}{2}\right)\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i;$$

$$z_1=\sqrt{4}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

***Ответ**:* $z_0=\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\quad z_1=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

Пример 9: ***Решение**:* $a=1,\quad b=3+2i,\quad c=-5+3i$ *. Вычислим дискриминант:*

$$D=b^2-4ac=(3+2i)^2-4\cdot1\cdot(-5+3i)=9+12i-4+20-12i=25$$

Таким образом:

$$\sqrt{D}=5$$

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(3+2i)-5}{2}=\frac{-8-2i}{2}=-4-i$$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(3+2i)+5}{2}=\frac{2-2i}{2}=1-i$$

***Ответ**:* $z_1=-4-i,\quad z_2=1-i$

***Проверка**: подставим в исходное уравнение* $z^2+(3+2i)z-5+3i=0$ *:*

1) $z_1=-4-i$:

$(-4-i)^2+(3+2i)(-4-i)-5+3i=0$

$(-1)^2\cdot(4+i)^2-12-8i-3i+2-5+3i=0$

$16+8i-1-15-8i=0$

$0=0$

верное равенство;

2) $z_2=1-i$:

$(1-i)^2+(3+2i)(1-i)-5+3i=0$

$1-2i-1+3+2i-3i+2-5+3i=0$

$0=0$

верное равенство.

Что и требовалось проверить.

*Пример 11: **Решение**: систему решим методом Крамера:*

$$\Delta=\begin{vmatrix}(1+i) & (-3-2i)\\ (-1+2i) & (2+5i)\end{vmatrix}=(1+i)(2+5i)-(-1+2i)(-3-2i)=$$

$$=2+2i+5i-5-(3-6i+2i+4)=-3+7i-(7-4i)=-3+7i-7+4i=-10+11i\neq 0$$

Таким образом, система имеет единственное решение.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}(20+4i) & (-3-2i)\\ (-19-9i) & (2+5i)\end{vmatrix}=(20+4i)(2+5i)-(19+9i)(3+2i)=$$

$$=40+8i+100i-20-(57+27i+38i-18)=20+108i-(39+65i)=20+108i-39-65i=-19+43i$$

$$z_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-19+43i}{-10+11i}=\frac{(-19+43i)(11i+10)}{(11i-10)(11i+10)}=\frac{-209i-190-473+430i}{-121-100}=\frac{-663+221i}{-221}=3-i$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}(1+i) & (20+4i)\\ (-1+2i) & (-19-9i)\end{vmatrix}=(1+i)(-19-9i)-(-1+2i)(20+4i)=$$

$$=-19-19i-9i+9-(-20-4i+40i-8)=-10-28i-(-28+36i)=-10-28i+28-36i=18-64i$$

$$z_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{18-64i}{-10+11i}=\frac{(18-64i)(11i+10)}{(11i-10)(11i+10)}=\frac{198i+180+704-640i}{-221}=\frac{884-442i}{-221}=-4+2i$$

Найдём произведение корней:

$$z_1\cdot z_2=(3-i)(-4+2i)=-12+4i+6i+2=-10+10i$$

Представим результат в тригонометрической форме:

$$|z_1\cdot z_2|=\sqrt{(-10)^2+10^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2},\quad \arg(z_1\cdot z_2)=\pi+arctg\frac{10}{-10}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$z_1\cdot z_2=10\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

***Ответ**:*

$$z_1=3-i,\quad z_2=-4+2i,\quad z_1\cdot z_2=10\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$