ДЗ до 11,01,2021

Добрый день,
Ознакомитесь и законспектируй те новый материал.

http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html

Непрерывность функции. Точки разрыва. Как исследовать функцию на непрерывность?

Идет бычок, качается, вздыхает на ходу:
– Ох, доска кончается, сейчас я упаду!

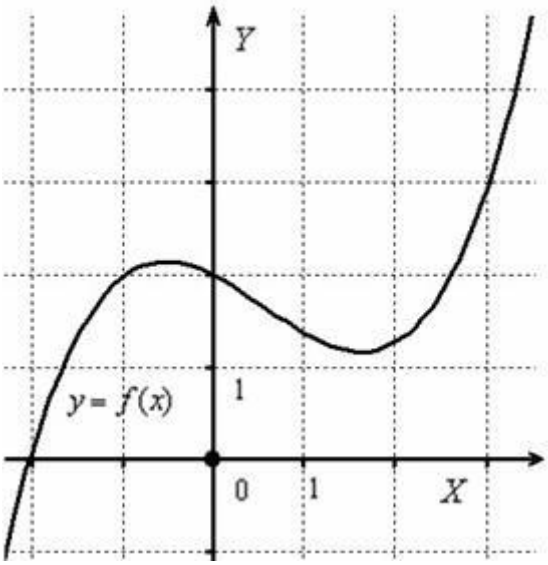
На данном уроке мы разберём понятие непрерывности функции, классификацию точек разрыва и распространённую практическую задачу **исследования функции на непрерывность**. Из самого названия темы многие интуитивно догадываются, о чём пойдёт речь, и думают, что материал довольно простой. Это правда. Но именно несложные задачи чаще всего наказывают за пренебрежение и поверхностный подход к их решению. Поэтому рекомендую очень внимательно изучить статью и уловить все тонкости и технические приёмы.

Что нужно знать и уметь? Не очень-то и много. Для качественного усвоения урока необходимо понимать, что такое **предел функции**. Читателям с низким уровнем подготовки достаточно осмыслить статью **Пределы функций. Примеры решений** и посмотреть геометрический смысл предела в методичке **Графики и свойства элементарных функций**. Также желательно ознакомиться с **геометрическими преобразованиями графиков**, поскольку практика в большинстве случаев предполагает построение чертежа. Перспективы оптимистичны для всех, и даже полный чайник сумеет самостоятельно справиться с задачей в ближайший час-другой!

Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

Понятие непрерывности функции

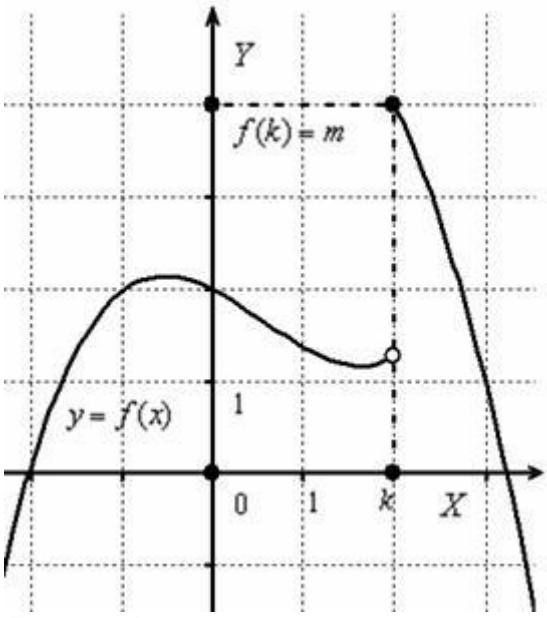
Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, непрерывную на всей числовой прямой:



Или, говоря лаконичнее, наша функция непрерывна на $\Re$ (множестве действительных чисел).

Каков «обывательский» критерий непрерывности? Очевидно, что график непрерывной функции можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги.

При этом следует чётко отличать два простых понятия: **область определения функции** и **непрерывность функции**. В общем случае это не одно и то же. Например:



Данная функция определена на всей числовой прямой, то есть для **каждого** значения «икс» существует своё значение «игрека» $y = f(x)$. В частности, если $x = k$, то $y = f(k) = m$. Заметьте, что другая точка выколота, ведь по определению функции, значению аргумента должно соответствовать **единственное** значение функции. Таким образом, **область определения** нашей функции: $D(f) = \Re$.

Однако **эта функция не является непрерывной на** $\Re$ **!** Совершенно очевидно, что в точке $x = k$ она терпит **разрыв**. Термин тоже вполне вразумителен и нагляден, действительно, карандаш здесь по любому придётся

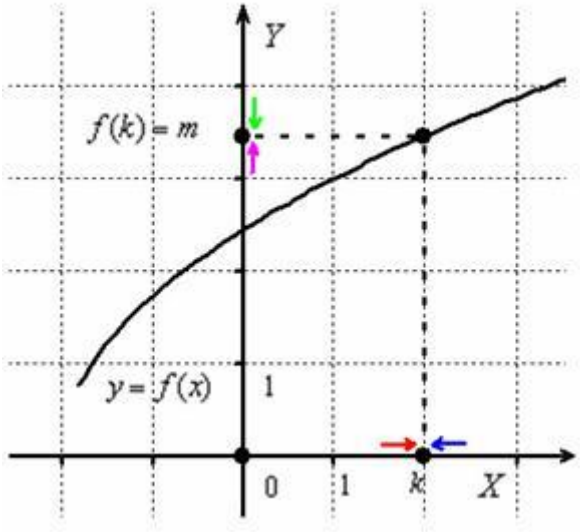
оторвать от бумаги. Немного позже мы рассмотрим классификацию точек разрыва.

Непрерывность функции в точке и на интервале

В той или иной математической задаче речь может идти о непрерывности функции в точке, непрерывности функции на интервале, полуинтервале или непрерывности функции на отрезке. То есть, **не существует «просто непрерывности»** – функция может быть непрерывной ГДЕ-ТО. И основополагающим «кирпичиком» всего остального является **непрерывность функции в точке**.

Теория математического анализа даёт определение непрерывности функции в точке с помощью «дельта» и «эпсилон» окрестностей, но на практике в ходу другое определение, которому мы и уделим самое пристальное внимание.

Сначала вспомним **односторонние пределы**, ворвавшиеся в нашу жизнь на первом уроке о графиках функций. Рассмотрим будничную ситуацию:



Если приближаться по оси OX к точке k **слева** (красная стрелка), то соответствующие значения «игреков» будут идти по оси OY к точке m (малиновая стрелка). Математически данный факт фиксируется с помощью **левостороннего предела**:

$$\lim_{x \to k-0} f(x) = m$$

Обратите внимание на запись $x \to k - 0$ (читается «икс стремится к ка слева»). «Добавка» «минус ноль» символизирует *бесконечно малое отрицательное число*, по сути это и обозначает, что мы подходим к числу k с левой стороны.

Аналогично, если приближаться к точке «ка» **справа** (синяя стрелка), то «игреки» придут к тому же значению m, но уже по зелёной стрелке, и **правосторонний предел** оформится следующим образом:

$$\lim_{x \to k+0} f(x) = m$$

«Добавка» $+0$ символизирует *бесконечно малое положительное число*, и запись $x \to k + 0$ читается так: «икс стремится к ка справа».

Если односторонние пределы конечны и равны (как в нашем случае): $\lim\limits_{x \to k-0} f(x) = \lim\limits_{x \to k+0} f(x) = m$, то будем говорить, что существует ОБЩИЙ

предел $\lim\limits_{x \to k} f(x) = m$. Всё просто, общий предел – это наш «обычный» **предел функции**, равный конечному числу.

Заметьте, что если функция не определена при $x = k$ (выколите чёрную точку на ветке графика), то перечисленные выкладки остаются справедливыми. Как уже неоднократно отмечалось, в частности, в статье **о бесконечно малых функциях**, выражения $x \to k + 0, \quad x \to k - 0, \quad x \to k$ означают, что «икс» *бесконечно близко* приближается к точке k, при этом **НЕ ИМЕЕТ ЗНАЧЕНИЯ**, определена ли сама функция в данной точке или нет. Хороший пример встретится в следующем параграфе, когда анализу подвергнется функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Определение: функция непрерывна в точке k, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to k} f(x) = f(k)$.

Определение детализируется в следующих условиях:

1) Функция должна быть определена в точке k, то есть должно существовать значение $f(k)$.

2) Должен существовать общий предел функции $\lim\limits_{x \to k} f(x)$. Как отмечалось выше, это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim\limits_{x \to k-0} f(x) = \lim\limits_{x \to k+0} f(x)$.

3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to k} f(x) = f(k)$.

!!! *Рекомендую законспектировать пункты, поскольку они потребуются для решения практических задач. Далее по тексту они будут отмечаться как Условие №1, Условие №2 и Условие №3.*

Если нарушено **хотя бы одно** из трёх условий, то функция теряет свойство непрерывности в точке k.

Непрерывность функции на интервале формулируется остроумно и очень просто: функция непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке данного интервала.

В частности, многие функции непрерывны на бесконечном интервале $(-\infty; +\infty)$, то есть на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Это линейная функция, многочлены, экспонента, синус, косинус и др. И вообще, любая **элементарная функция** непрерывна на своей **области определения**, так, например, логарифмическая функция $f(x) = \ln x$ непрерывна на интервале $(0; +\infty)$. Надеюсь, к данному моменту вы достаточно хорошо представляете, как выглядят графики основных функций. Более подробную информацию об их непрерывности можно почерпнуть у доброго человека по фамилии Фихтенгольц.

С непрерывностью функции на отрезке $[a;b]$ и полуинтервалах $[a;b),(a;b]$ тоже всё несложно, но об этом уместнее рассказать на уроке **о нахождении минимального и максимального значений функции на отрезке**, а пока голову забивать не будем.

Классификация точек разрыва

Увлекательная жизнь функций богата всякими особенными точками, и точки разрыва лишь одна из страничек их биографии.

***Примечание**: на всякий случай остановлюсь на элементарном моменте: точка разрыва – это всегда отдельно взятая точка – не бывает «несколько точек разрыва подряд», то есть, нет такого понятия, как «интервал разрывов».*

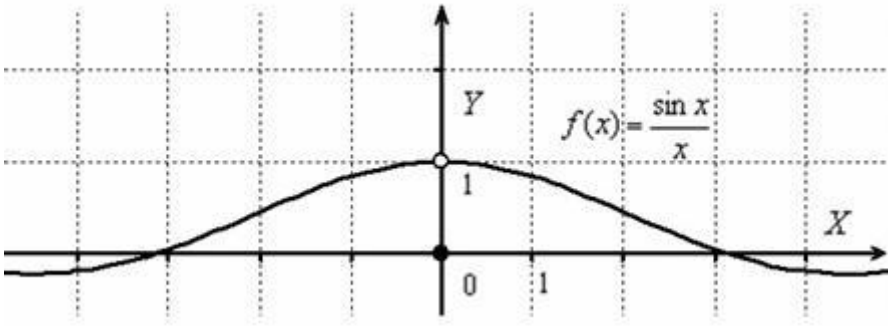
Данные точки в свою очередь подразделяются на две большие группы: **разрывы первого рода** и **разрывы второго рода**. У каждого типа разрыва есть свои характерные особенности, которые мы рассмотрим прямо сейчас:

Точка разрыва первого рода

Если в точке k нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы конечны**, то она называется **точкой разрыва первого рода**.

Начнём с самого оптимистичного случая. По первоначальной задумке урока я хотел рассказать теорию «в общем виде», но чтобы продемонстрировать реальность материала, остановился на варианте с конкретными действующими лицами.

Уныло, как фото молодожёнов на фоне Вечного огня, но нижеследующий кадр общепринят. Изобразим на чертеже график функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$:



Данная функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x=0$. И в самом деле, знаменатель же не может быть равен нулю. Однако в соответствии со смыслом предела – мы можем *бесконечно близко* приближаться к «нулю» и слева и справа, то есть, односторонние пределы существуют и, очевидно, совпадают:

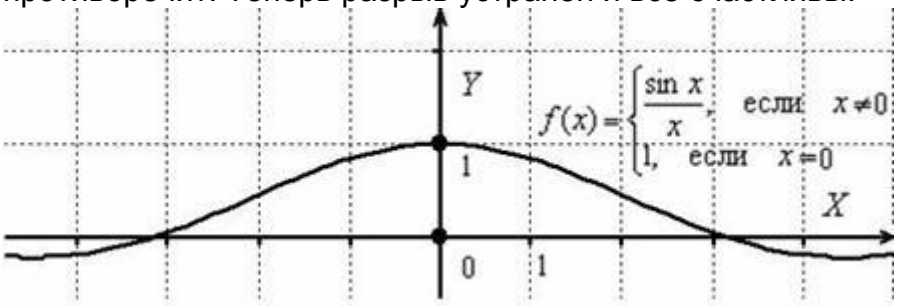
$\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$ (Условие №2 непрерывности выполнено).

Но функция не определена в точке $x=0$, следовательно, нарушено Условие №1 непрерывности, и функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ терпит разрыв в данной точке.

Разрыв такого вида (с существующим общим пределом) называют **устранимым разрывом**. Почему устранимым? Потому что функцию можно доопределить в точке разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x\neq 0\\ 1, & \text{если} \quad x=0\end{cases}$$

Странно выглядит? Возможно. Но такая запись функции ничему не противоречит! Теперь разрыв устранён и все счастливы:



Выполним формальную проверку:

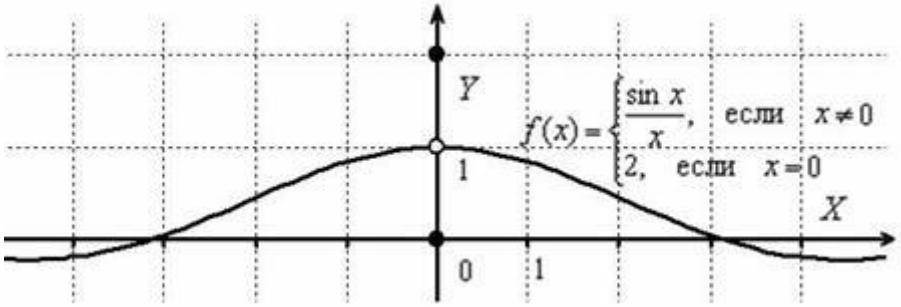
1) $f(0)=1$ – функция определена в данной точке;

2) $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – общий предел существует;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=f(0)$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, все три условия выполнены, и функция непрерывна в точке $x=0$ по определению непрерывности функции в точке.

Впрочем, ненавистники матана могут доопределить функцию нехорошим способом, например $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x\neq 0\\ 2, & \text{если} \quad x=0\end{cases}$:



Любопытно, что здесь выполнены первые два условия непрерывности:

1) $f(0)=2$ – функция определена в данной точке;

2) $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – общий предел существует.

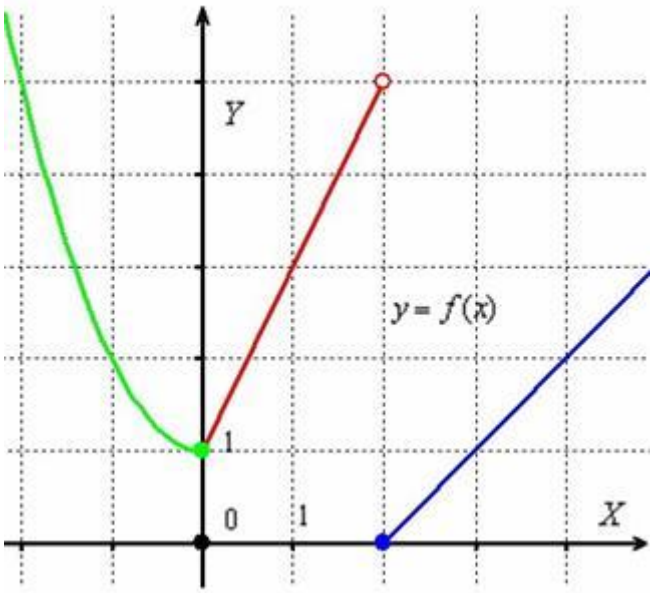
Но третий рубеж не пройден: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\neq f(0)$, то есть предел функции в точке **не равен** значению данной функции в данной точке.

Таким образом, в точке $x=0$ функция терпит разрыв.

Второй, более грустный случай носит название **разрыва первого рода со скачком**. А грусть навевают односторонние пределы, которые конечны и различны. Пример изображён на втором чертеже урока. Такой разрыв возникает, как правило, в **кусочно-заданных функциях**, о которых уже упоминалось в статье **о преобразованиях графиков**.

Рассмотрим кусочную функцию $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если } x\le 0 \\ 1+2x, & \text{если } 0<x<2 \\ x-2, & \text{если } x\ge 2 \end{cases}$ и выполним её чертёж. Как построить график? Очень просто. На полуинтервале $(-\infty;0]$ чертим фрагмент параболы $f(x)=x^2+1$ (зеленый цвет), на интервале $(0;2)$ – отрезок прямой $f(x)=1+2x$ (красный цвет) и на полуинтервале $[2;+\infty)$ – прямую $f(x)=x-2$ (синий цвет).

При этом в силу неравенства $x\le 0$ значение $f(0)$ определено для квадратичной функции $f(x)=x^2+1$ (зелёная точка), и в силу неравенства $x\ge 2$, значение $f(2)$ определено для линейной функции $f(x)=x-2$ (синяя точка):



В самом-самом тяжёлом случае следует прибегнуть к поточечному построению каждого куска графика (см. первый **урок о графиках функций**).

Сейчас нас будет интересовать только точка $x=2$. Исследуем её на непрерывность:

1) $f(2)=2-2=0$ – функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы.

Слева у нас красный отрезок прямой, поэтому левосторонний предел: $\lim\limits_{x\to 2-0}(1+2x)=1+2\cdot 2=5$

Справа – синяя прямая, и правосторонний предел: $\lim\limits_{x\to 2+0}(x-2)=2-2=0$

В результате получены *конечные числа*, причем они *не равны*. Поскольку односторонние пределы конечны и различны: $\lim\limits_{x\to 2-0}(1+2x)\neq\lim\limits_{x\to 2+0}(x-2)$, то наша функция терпит разрыв первого рода со скачком.

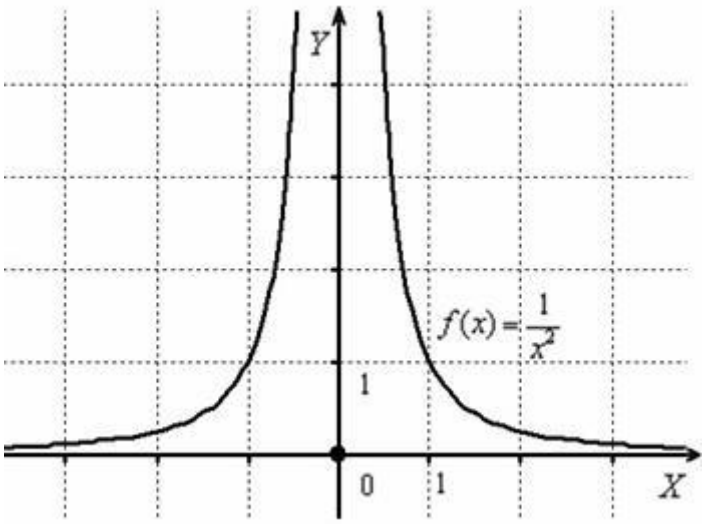
Логично, что разрыв не устраним – функцию действительно не доопределить и «не склеить», как в предыдущем примере.

Точки разрыва второго рода

Обычно к данной категории хитро относят все остальные случаи разрыва. Всё перечислять не буду, поскольку на практике в 99%-ти процентах задач вам встретится **бесконечный разрыв** – когда левосторонний или правосторонний, а чаще, оба предела бесконечны.

И, конечно же, самая напрашивающаяся картинка – гипербола в точке ноль. Здесь оба односторонних предела бесконечны: $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty,\quad\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$, следовательно, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ терпит разрыв второго рода в точке $x=0$.

Я стараюсь наполнять свои статьи максимально разнообразным содержанием, поэтому давайте посмотрим на график функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$, который ещё не встречался:



Исследуем на непрерывность точку $x=0$ по стандартной схеме:

1) Функция не определена в данной точке, поскольку знаменатель обращается в ноль.

Конечно, можно сразу сделать вывод о том, что функция терпит разрыв в точке $x=0$, но хорошо бы классифицировать характер разрыва, что часто требуется по условию. Для этого:

2) Вычислим односторонние пределы:

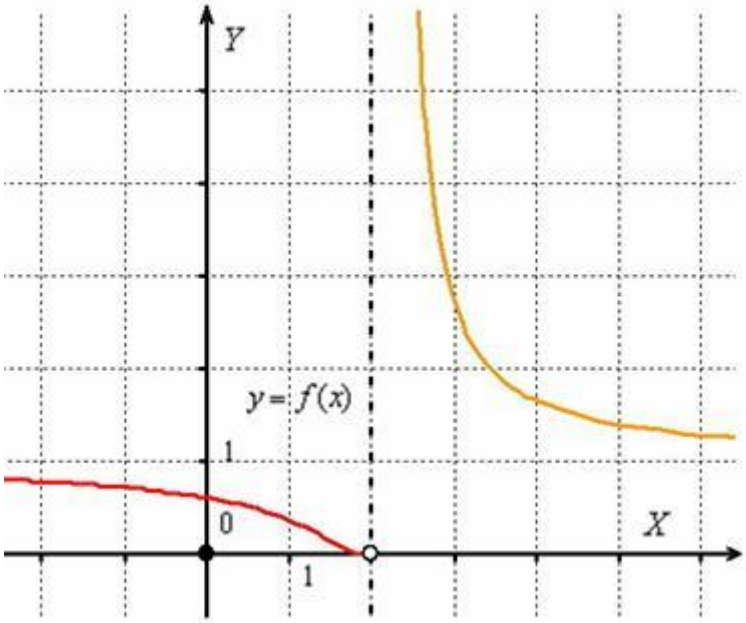
$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(-0)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(+0)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

Напоминаю, что под записью -0 понимается *бесконечно малое отрицательное число*, а под записью $+0$ – *бесконечно малое положительное число*.

Односторонние пределы бесконечны, значит, функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$ терпит разрыв 2-го рода в точке $x=0$. Ось ординат является **вертикальной асимптотой** для графика.

Не редка ситуация, когда оба односторонних предела существуют, но бесконечен только один из них, например:



Это график функции $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$.

Исследуем на непрерывность точку $x=2$:

1) Функция не определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{2-0-2}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{2+0-2}}=e^{\frac{1}{+0}}=e^{+\infty}=+\infty$$

О методике вычисления таких односторонних пределов поговорим в двух последних примерах лекции, хотя многие читатели всё уже увидели и догадались.

Левосторонний предел конечен и равен нулю (в саму точку мы «не заходим»), но правосторонний предел бесконечен и оранжевая ветка графика бесконечно близко приближается к своей **вертикальной асимптоте**, заданной уравнением $x=2$ (чёрный пунктир).

Таким образом, функция $y=f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$ терпит **разрыв второго рода** в точке $x=2$.

Как и для разрыва 1-го рода, в самой точке разрыва функция может быть определена. Например, для кусочной функции $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{если} \quad x > 0 \end{cases}$ смело ставим чёрную жирную точку в начале координат. Справа же – ветка гиперболы, и правосторонний предел бесконечен. Думаю, почти все представили, как выглядит этот график.

То, чего все с нетерпением ждали:

Как исследовать функцию на непрерывность?

Исследование функции на непрерывность в точке проводится по уже накатанной рутинной схеме, которая состоит в проверке трёх условий непрерывности:

Пример 1

Исследовать функцию $y=f(x)=\frac{x^3-x^2}{x-1}$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертёж.

Решение:

1) Под прицел попадает единственная точка $x=1$, в которой функция не определена.

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3-x^2}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}(x^2)=1$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3-x^2}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}(x^2)=1$$

Односторонние пределы конечны и равны.

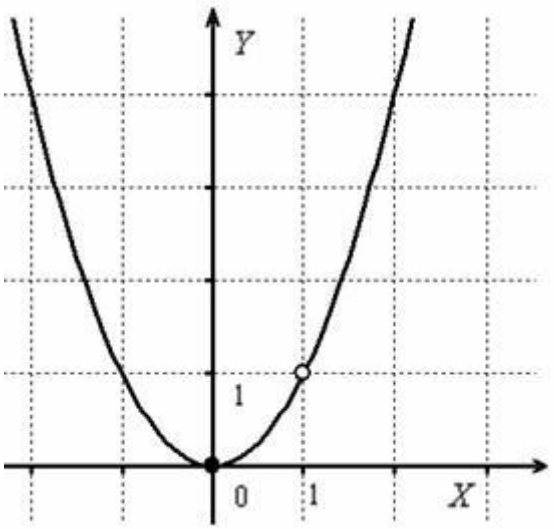
Таким образом, в точке $x=1$ функция терпит устранимый разрыв.

Как выглядит график данной функции?

Хочется провести упрощение $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x-1}=\frac{x^2(x-1)}{x-1}=x^2$, и вроде бы получается обычная парабола. **НО** исходная функция не определена в точке $x=1$, поэтому обязательна следующая оговорка:

$f(x)=x^2, \quad \text{если} \quad x\neq 1$

Выполним чертёж:



Ответ: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x=1$, в которой она терпит устранимый разрыв.

Функцию можно доопределить хорошим или не очень способом, но по условию этого не требуется.

Вы скажете, пример надуманный? Ничуть. Десятки раз встречалось на практике. Почти все задачи сайта родом из реальных самостоятельных и контрольных работ.

Разделаемся с любимыми модулями:

Пример 2

Исследовать функцию $y=f(x)=x^2-\frac{|x+1|}{x+1}-1$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертёж.

Решение: почему-то студенты боятся и не любят функции с модулем, хотя ничего сложного в них нет. Таких вещей мы уже немного коснулись на уроке **Геометрические преобразования графиков**. Поскольку модуль неотрицателен, то он раскрывается следующим образом: $|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \text{если} \quad \alpha\geq 0\\ -\alpha, & \text{если} \quad \alpha<0\end{cases}$, где «альфа» – некоторое выражение. В данном случае $\alpha=x+1$, и наша функция должна расписаться кусочным образом:

$$f(x)=x^2-\frac{|x+1|}{x+1}-1=\begin{cases}x^2-\frac{x+1}{x+1}-1, & \text{если} \quad x+1\geq 0\\ x^2-\frac{-(x+1)}{x+1}-1, & \text{если} \quad x+1<0\end{cases}$$

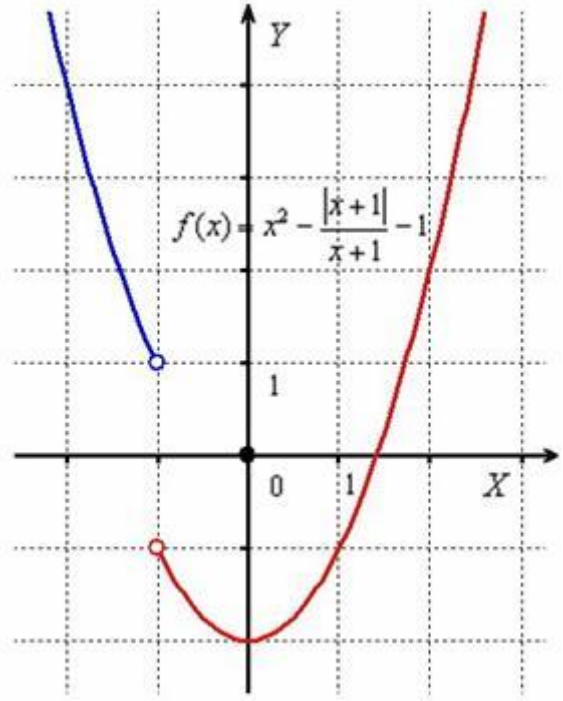
Но дроби обоих кусков предстоит сократить на $x+1$. Сокращение, как и в предыдущем примере, не пройдёт без последствий. Исходная функция не определена в точке $x=-1$, так как знаменатель обращается в ноль. Поэтому в системе следует дополнительно указать условие $x\neq -1$, и первое

неравенство $x+1\geq 0$ сделать строгим:

$$f(x)=x^2-\frac{|x+1|}{x+1}-1=\begin{cases}x^2-2, & \text{если} \quad x>-1\\ x\neq -1 & \\ x^2, & \text{если} \quad x<-1\end{cases}$$

Теперь об ОЧЕНЬ ПОЛЕЗНОМ приёме решения: перед чистовым оформлением задачи на черновике выгодно сделать чертёж (независимо от того, требуется он по условию или нет). Это поможет, во-первых, сразу увидеть точки непрерывности и точки разрыва, а, во-вторых, 100%-но убережёт от ошибок при нахождении односторонних пределов.

Выполним чертёж. В соответствии с нашими выкладками, слева от точки $x=-1$ необходимо начертить фрагмент параболы $f(x)=x^2$ (синий цвет), а справа – кусок параболы $f(x)=x^2-2$ (красный цвет), при этом функция не определена в самой точке $x=-1$:



Если есть сомнения, возьмите несколько значений «икс», подставьте их в функцию $f(x)=x^2-\frac{|x+1|}{x+1}-1$ (не забывая, что модуль уничтожает возможный знак «минус») и сверьтесь с графиком.

Исследуем функцию на непрерывность аналитически:

1) Функция не определена в точке $x=-1$, поэтому сразу можно сказать, что не является в ней непрерывной.

2) Установим характер разрыва, для этого вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(x^2)=(-1)^2=1$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(x^2-2)=(-1)^2-2=1-2=-1$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция терпит разрыв 1-го рода со скачком в точке $x=-1$. Ещё раз заметьте, что при нахождении пределов не имеет значения, определена функция в точке разрыва или нет.

Теперь остаётся перенести чертёж с черновика (он сделан как бы с помощью исследования ;-)) и завершить задание:

Ответ: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x=-1$, в которой она терпит разрыв первого рода со скачком.

Иногда требуют дополнительно указать скачок разрыва. Вычисляется он элементарно – из правого предела нужно вычесть левый предел: $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) - \lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = -1-1=-2$, то есть в точке разрыва наша функция прыгнула на 2 единицы вниз (о чём нам сообщает знак «минус»).

Пример 3

Исследовать функцию $y=f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x-1|}$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Сделать чертёж.

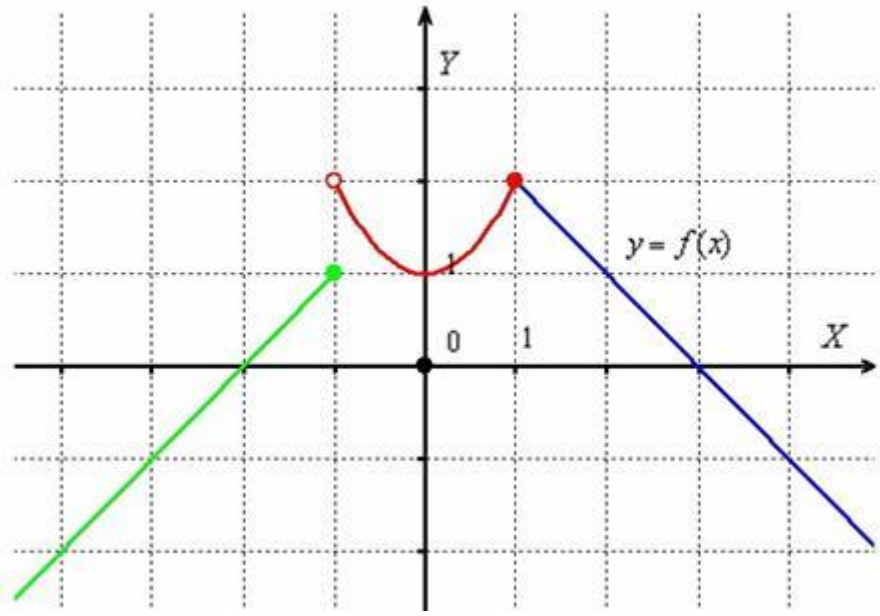
Это пример для самостоятельного решения, примерный образец решения в конце урока.

Перейдём к наиболее популярной и распространённой версии задания, когда функция состоит из трёх кусков:

Пример 4

Исследовать функцию на непрерывность и построить график функции $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если } x\le -1 \\ x^2+1, & \text{если } -1<x\le 1 \\ -x+3, & \text{если } x>1 \end{cases}$.

Решение: очевидно, что все три части функции непрерывны на соответствующих интервалах, поэтому осталось проверить только две точки «стыка» между кусками. Сначала выполним чертёж на черновике, технику построения я достаточно подробно закомментировал в первой части статьи. Единственное, необходимо аккуратно проследить за нашими особенными точками: в силу неравенства $x\le -1$ значение $x=-1$ принадлежит прямой $f(x)=x+2$ (зелёная точка), и в силу неравенство $x\le 1$ значение $x=1$ принадлежит параболе $f(x)=x^2+1$ (красная точка):



Ну вот, в принципе, всё понятно =) Осталось оформить решение. Для каждой из двух «стыковых» точек стандартно проверяем 3 условия непрерывности:

I) Исследуем на непрерывность точку $x=-1$

1) $f(-1)=-1+2=1$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}(x+2)=1$

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}(x^2+1)=1+1=2$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция $f(x)$ терпит разрыв 1-го рода со скачком в точке $x=-1$.

Вычислим скачок разрыва как разность правого и левого пределов:

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)-\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=2-1=1$, то есть, график рванул на одну единицу вверх.

II) Исследуем на непрерывность точку $x=1$

1) $f(1)=1^2+1=2$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+1)=1+1=2$

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(-x+3)=-1+3=2$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$ – односторонние пределы конечны и равны, значит, существует общий предел.

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=1$ по определению непрерывности функции в точке.

На завершающем этапе переносим чертёж на чистовик, после чего ставим финальный аккорд:

Ответ: функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x=-1$, в которой она терпит разрыв первого рода со скачком.

Готово.

Пример 5

Исследовать функцию на непрерывность и построить её график $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если } x\le 0 \\ 1+2x, & \text{если } 0<x<2 \\ x-2, & \text{если } x\ge 2 \end{cases}$.

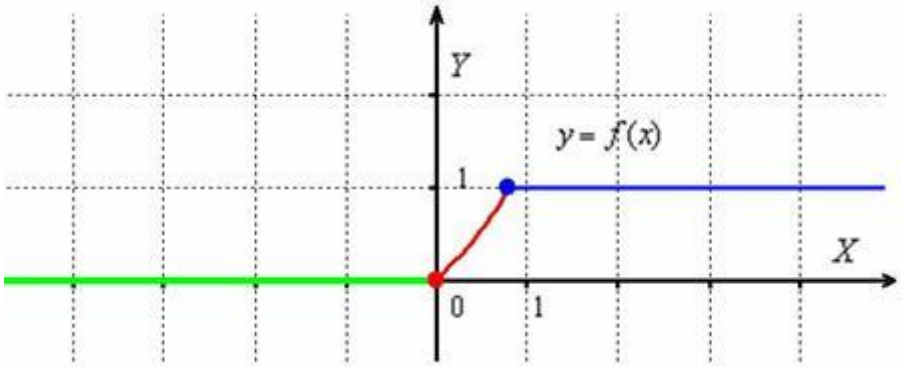
Это пример для самостоятельного решения, краткое решение и примерный образец оформления задачи в конце урока.

Может сложиться впечатление, что в одной точке функция обязательно должна быть непрерывной, а в другой – обязательно должен быть разрыв. На практике это далеко не всегда так. Постарайтесь не пренебрегать оставшимися примерами – будет несколько интересных и важных фишек:

Пример 6

Дана функция $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ tgx, & 0\le x<\frac{\pi}{4} \\ 1, & x\ge \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Исследовать функцию на непрерывность в точках $x=0,\ x=\frac{\pi}{4}$. Построить график.

Решение: и снова сразу выполним чертёж на черновике:



Особенность данного графика состоит в том, что при $x<0$ кусочная функция задаётся уравнением оси абсцисс $y=f(x)=0$. Здесь данный участок прорисован зелёным цветом, а в тетради его обычно жирно выделяют простым карандашом. И, конечно же, не забываем про наших баранов: значение $x=0$ относится к ветке тангенса (красная точка), а значение $x=\frac{\pi}{4}$ принадлежит прямой $y=f(x)=1$.

Из чертежа всё понятно – функция непрерывна на всей числовой прямой, осталось оформить решение, которое доводится до полного автоматизма буквально после 3-4 подобных примеров:

I) Исследуем на непрерывность точку $x = 0$

1) $f(0) = tg0 = 0$ – функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} (tgx) = tg0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$, значит, общий предел существует.

На всякий пожарный напомню тривиальный факт: предел константы равен самой константе. В данном случае предел нуля равен самому нулю (левосторонний предел).

Едем дальше:

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ по определению непрерывности функции в точке.

II) Исследуем на непрерывность точку $x = \frac{\pi}{4}$

1) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}-0} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}-0} (tgx) = tg\frac{\pi}{4} = 1$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}+0} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}+0} 1 = 1$

И здесь – предел единицы равен самой единице.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}-0} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}+0} f(x)$ – общий предел существует.

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{4}$ по определению непрерывности функции в точке.

Как обычно, после исследования переносим наш чертёж на чистовик.

Ответ: функция непрерывна в точках $x=0,\ x=\frac{\pi}{4}$.

Обратите внимание, что в условии нас ничего не спрашивали про исследование всей функции на непрерывность, и хорошим математическим тоном считается формулировать **точный и чёткий** ответ на поставленный вопрос. Кстати, если по условию не требуется строить график, то вы имеете полное право его и не строить (правда, потом преподаватель может заставить это сделать).

Небольшая математическая «скороговорка» для самостоятельного решения:

Пример 7

Дана функция $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x+2}, & x<-2\\ 2, & -2\le x\le 2\\ \frac{1}{2x}, & x>2\end{cases}$. Исследовать функцию на непрерывность в точках $x=-2,\ x=2$. Классифицировать точки разрыва, если они есть. Выполнить чертёж.

Постарайтесь правильно «выговорить» все «слова» =) И график нарисовать поточнее, точность, она везде лишней не будет ;-)

Как вы помните, я рекомендовал незамедлительно выполнять чертёж на черновике, но время от времени попадаются такие примеры, где не сразу сообразишь, как выглядит график. Поэтому в ряде случаев выгодно сначала найти односторонние пределы и только потом на основе исследования изобразить ветви. В двух заключительных примерах мы, кроме того, освоим технику вычисления некоторых односторонних пределов:

Пример 8

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}$ и построить её схематический график.

Решение: нехорошие точки очевидны: $x=-1$ (обращает в ноль знаменатель показателя) и $x=3$ (обращает в ноль знаменатель всей дроби). Малопонятно, как выглядит график данной функции, а значит, сначала лучше провести исследование:

I) Исследуем на непрерывность точку $x=-1$

1) Функция не определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}=\frac{2^{\frac{1}{-1-0+1}}}{3-(-1-0)}=\frac{2^{\frac{1}{-0}}}{4}=\frac{2^{-\infty}}{4}=\frac{0}{4}=0$$

Обратите внимание на **типовой приём вычисления одностороннего предела**: в функцию вместо «икса» мы подставляем $-1-0$. В знаменателе никакого криминала: «добавка» «минус ноль» не играет роли, и получается «четыре». А вот в числителе происходит небольшой триллер: сначала в

знаменателе показателя $\frac{1}{-1-0+1}$ убиваем –1 и 1, в результате чего получается $2^{\frac{1}{-0}}$. Единица, делённая на *бесконечно малое отрицательное число*, равна «минус бесконечности», следовательно: $2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty}$. И, наконец, «двойка» в *бесконечно большой отрицательной степени* равна нулю: $2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = 0$. Или, если ещё подробнее: $2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0$.

Вычислим правосторонний предел:

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x} = \frac{2^{\frac{1}{-1+0+1}}}{3-(-1+0)} = \frac{2^{\frac{1}{+0}}}{4} = \frac{2^{+\infty}}{4} = +\infty$$

И здесь – вместо «икса» подставляем $-1+0$. В знаменателе «добавка» $+0$ снова не играет роли: $3-(-1+0) = 3+1-0 = 4$. В числителе проводятся аналогичные предыдущему пределу действия: уничтожаем противоположные числа и делим единицу на *бесконечно малое положительное число*: $2^{\frac{1}{-1+0+1}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty$

Правосторонний предел бесконечен, значит, функция терпит разрыв 2-го рода в точке $x = -1$.

II) Исследуем на непрерывность точку $x = 3$

1) Функция не определена в данной точке.

2) Вычислим левосторонний предел:

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3-0} \frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x} = \frac{2^{\frac{1}{3-0+1}}}{3-(3-0)} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{3-3+0} = \frac{\sqrt[4]{2}}{+0} = +\infty$$

Метод такой же: подставляем в функцию вместо «икса» $3-0$. В числителе ничего интересного – получается конечное положительно число $\sqrt[4]{2}$. А в знаменателе раскрываем скобки, убираем «тройки», и решающую роль играет «добавка» $+0$.

По итогу, конечное положительное число, делённое на *бесконечно малое положительное число*, даёт «плюс бесконечность»: $\frac{\sqrt[4]{2}}{+0} = +\infty$.

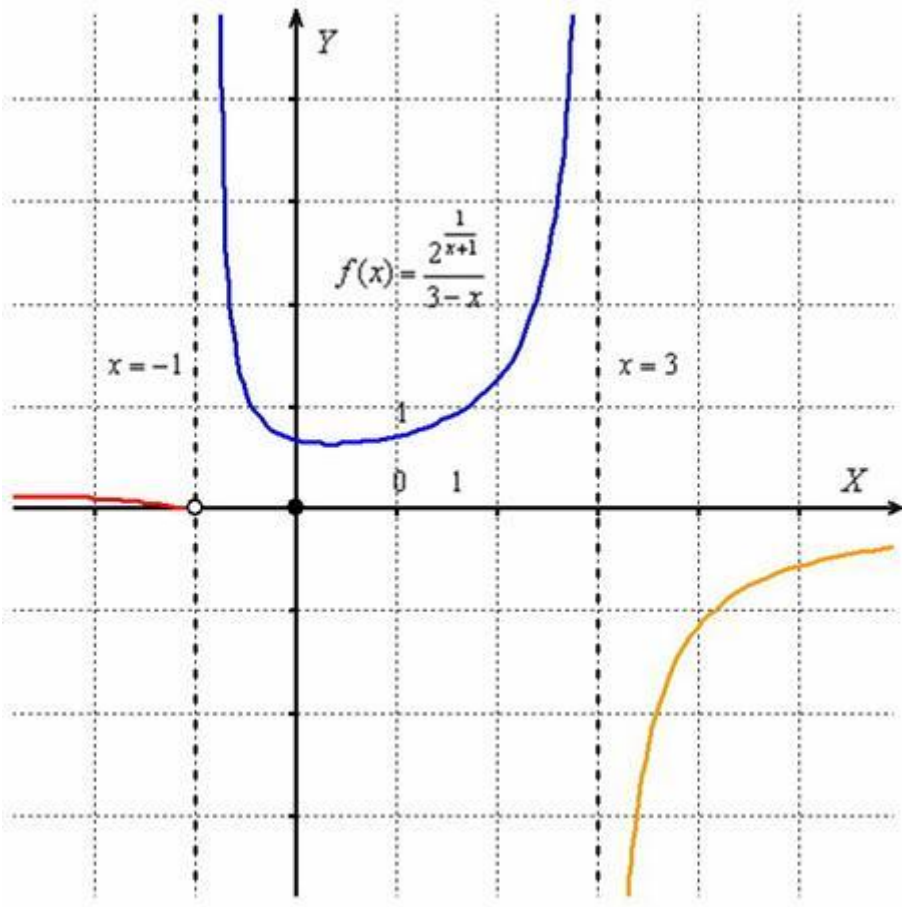
Правосторонний предел, как брат близнец, за тем лишь исключением, что в знаменателе выплывает *бесконечно малое отрицательное число*:

$$\lim_{x \to 3+0} f(x) = \lim_{x \to 3+0} \frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x} = \frac{2^{\frac{1}{3+0+1}}}{3-(3+0)} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{3-3-0} = \frac{\sqrt[4]{2}}{-0} = -\infty$$

Односторонние пределы бесконечны, значит, функция терпит разрыв 2-го рода в точке $x = 3$.

Таким образом, у нас две точки разрыва, и, очевидно, три ветки графика. Для каждой ветки целесообразно провести поточечное построение, т.е. взять

несколько значений «икс» и подставить их в $\frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}$. Заметьте, что по условию допускается построение схематического чертежа, и такое послабление естественно для ручной работы. Я строю графики с помощью проги, поэтому не имею подобных затруднений, вот достаточно точная картинка:



Прямые $x=-1,\ x=3$ являются **вертикальными асимптотами** для графика данной функции.

Ответ: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точек $x=-1,\ x=3$, в которых она терпит разрывы 2-го рода.

Более простая функция для самостоятельного решения:

Пример 9

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=e^{\frac{1}{1-x}}$ и выполнить схематический чертёж.

Примерный образец решения в конце, который подкрался незаметно.

До скорых встреч!

Решения и ответы:

Пример 3: ***Решение****: преобразуем функцию:* $y = f(x) = \dfrac{x(x-1)}{|x-1|}$ *. Учитывая правило раскрытия модуля* $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{если} \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{если} \quad \alpha < 0 \end{cases}$ *и тот факт, что* $x \neq 1$*, перепишем функцию в кусочном виде:*

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)}, & \text{если} \quad x-1 > 0 \\ x \neq 1 & \\ \dfrac{x(x-1)}{-(x-1)}, & \text{если} \quad x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x > 1 \\ x \neq 1 & \\ -x, & \text{если} \quad x < 1 \end{cases}$$

Исследуем функцию на непрерывность.

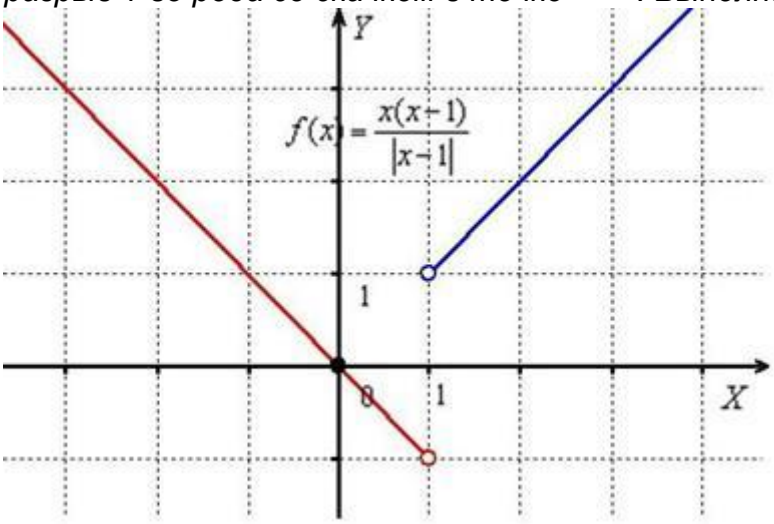
1) Функция не определена в точке $x = 1$*.*

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} (-x) = -1$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (x) = 1$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция терпит разрыв 1-го рода со скачком в точке $x = 1$*. Выполним чертёж:*



Ответ*: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки* $x = 1$*, в которой она терпит разрыв первого рода со скачком. Скачок разрыва:* $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) - \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 1 - (-1) = 2$ *(две единицы вверх).*

Пример 5: ***Решение****: каждая из трёх частей функции непрерывна на своём интервале.*

I) *Исследуем на непрерывность точку* $x = 0$

1) $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ *– функция определена в данной точке.*

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (x^2 + 1) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (1 + 2x) = 1 + 0 = 1$$

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$ *, значит, общий предел существует.*

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$ *– предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.*

Таким образом, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=0$ по определению непрерывности функции в точке.

***II)** Исследуем на непрерывность точку $x=2$*

1) $f(2)=2-2=0$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(1+2x)=1+4=5$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(x-2)=2-2=0$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция $f(x)$ терпит разрыв 1-го рода со скачком в точке $x=2$.

Скачок разрыва: $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x)-\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=0-5=-5$ (пять единиц вниз).

Чертёж можно найти в первой части статьи.

***Ответ**: функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x=2$, в которой она терпит разрыв первого рода со скачком.*

*Пример 7: **Решение**:*

***I)** Исследуем на непрерывность точку $x=-2$*

1) $f(-2)=2$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0}\frac{2}{x+2}=\frac{2}{-2-0+2}=\frac{2}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2+0} f(x)=\lim_{x\to -2+0} 2=2$$

Левосторонний предел бесконечен, значит, функция терпит разрыв 2-го рода в точке $x=-2$.

***II)** Исследуем на непрерывность точку $x=2$*

1) $f(2)=2$ – функция определена в данной точке.

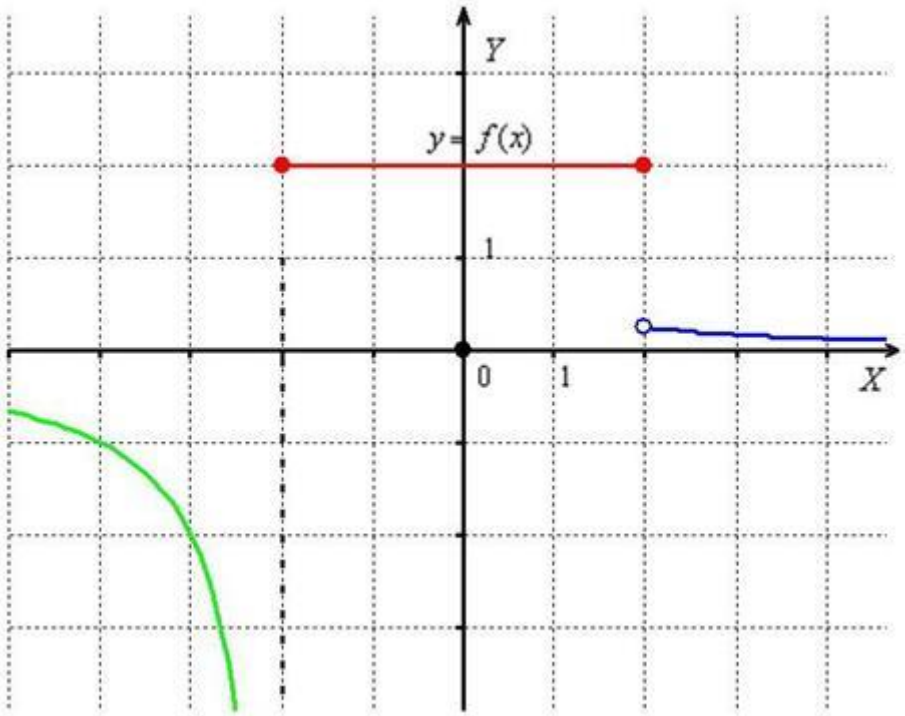
2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} 2=2$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{2x}=\frac{1}{4}$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция $f(x)$ терпит разрыв 1-го рода со скачком в точке $x=2$.

Выполним чертёж:



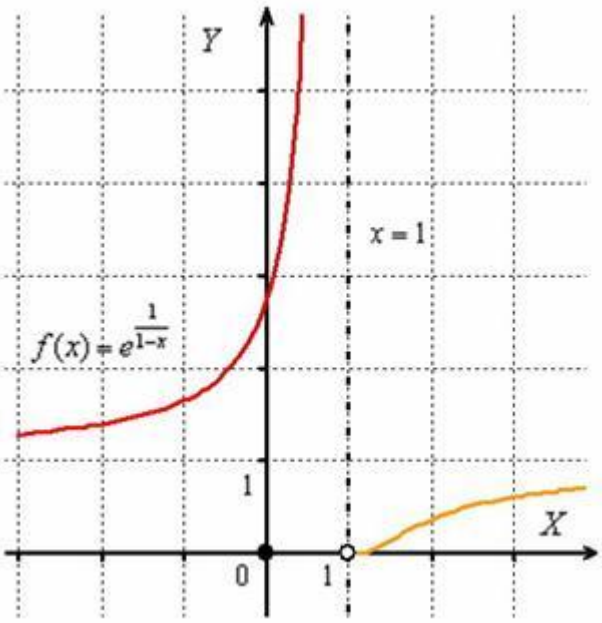
***Ответ**: В точке $x=-2$ функция терпит разрыв 2-го рода, в точке $x=2$ функция терпит разрыв 1-го рода со скачком.*

*Пример 9: **Решение**: исследуем на непрерывность точку $x=1$:*
1) Функция не определена в данной точке.
2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{1-x}}=e^{\frac{1}{1-(1-0)}}=e^{\frac{1}{1-1+0}}=e^{\frac{1}{+0}}=e^{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{1-x}}=e^{\frac{1}{1-(1+0)}}=e^{\frac{1}{1-1-0}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=0$$

Левосторонний предел бесконечен, значит, функция терпит разрыв 2-го рода в точке $x=1$.
Выполним чертёж:



***Ответ**: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x=1$, в которой она терпит разрыв 2-го рода.*