ДЗ до 11,01,2021

Добрый день,
Ознакомитесь и законспектируй те новый материал.
http://mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html

Что такое производная?
Определение и смысл производной функции

Многие удивятся неожиданному расположению этой статьи в моём авторском курсе о производной функции одной переменной и её приложениях. Ведь как оно было ещё со школы: стандартный учебник в первую очередь даёт определение производной, её геометрический, механический смысл. Далее учащиеся находят производные функций по определению, и, собственно, только потом оттачивается техника дифференцирования с помощью **таблицы производных**.

Но с моей точки зрения, более прагматичен следующий подход: прежде всего, целесообразно ХОРОШО ПОНЯТЬ **предел функции**, и, в особенности, **бесконечно малые величины**. Дело в том, что **определение производной базируется на понятии предела**, которое слабо рассмотрено в школьном курсе. Именно поэтому значительная часть молодых потребителей гранита знаний плохо вникают в саму суть производной. Таким образом, если вы слабо ориентируетесь в дифференциальном исчислении либо мудрый мозг за долгие годы успешно избавился от оного багажа, пожалуйста, начните с **пределов функций**. Заодно освоите/вспомните их решение.

Тот же практический смысл подсказывает, что сначала выгодно **научиться находить производные**, в том числе **производные сложных функций**. Теория теорией, а дифференцировать, как говорится, хочется всегда. В этой связи лучше проработать перечисленные базовые уроки, а может и стать **мастером дифференцирования**, даже не осознавая сущности своих действий.

К материалам данной страницы рекомендую приступать после ознакомления со статьёй **Простейшие задачи с производной**, где, в частности рассмотрена задача о касательной к графику функции. Но можно и повременить. Дело в том, что многие приложения производной не требуют её понимания, и неудивительно, что теоретический урок появился достаточно поздно – когда мне потребовалось объяснять **нахождение интервалов возрастания/убывания и экстремумов** функции. Более того, он довольно долго находился в теме «**Функции и графики**», пока я всё-таки не решил поставить его раньше.

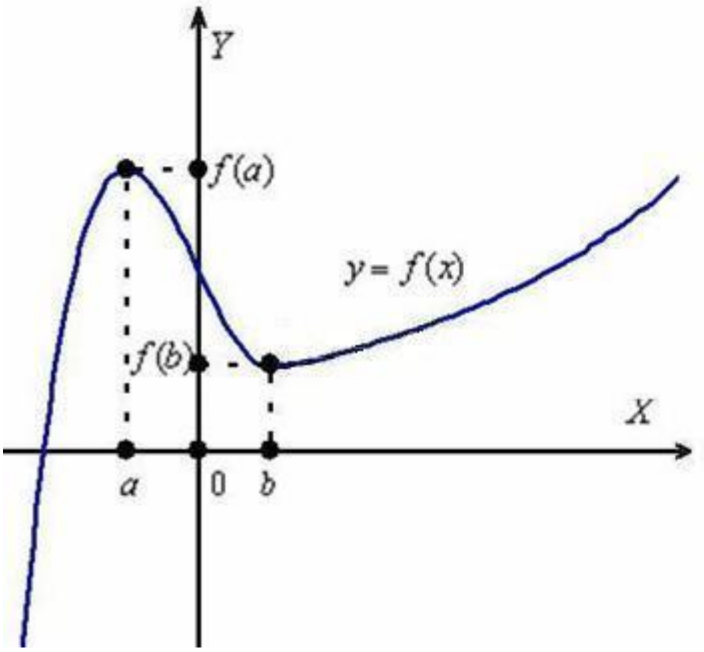
Поэтому, уважаемые чайники, не спешите поглощать суть производной, как голодные звери, ибо насыщение будет невкусным и неполным.

Понятие возрастания, убывания, максимума, минимума функции

Многие учебные пособия подводят к понятию производной с помощью каких-либо практических задач, и я тоже придумал интересный пример. Представьте, что нам предстоит путешествие в город, до которого можно добраться разными путями. Сразу откинем кривые петляющие дорожки, и будем рассматривать только прямые магистрали. Однако прямолинейные направления тоже бывают разными: до города можно добраться по ровному автобану. Или по холмистому шоссе – вверх-вниз, вверх-вниз. Другая дорога идёт только в гору, а ещё одна – всё время под уклон. Экстремалы выберут маршрут через ущелье с крутым обрывом и отвесным подъемом.

Но каковы бы ни были ваши предпочтения, желательно знать местность или, по меньшей мере, располагать её топографической картой. А если такая информация отсутствует? Ведь можно выбрать, например, ровный путь, да в результате наткнуться на горнолыжный спуск с весёлыми финнами. Не факт, что навигатор и даже спутниковый снимок дадут достоверные данные. Поэтому неплохо бы формализовать рельеф пути средствами математики.

Рассмотрим некоторую дорогу $y = f(x)$ (вид сбоку):



На всякий случай напоминаю элементарный факт: путешествие происходит **слева направо**. Для простоты полагаем, что функция **непрерывна** на рассматриваемом участке.

Какие особенности у данного графика?

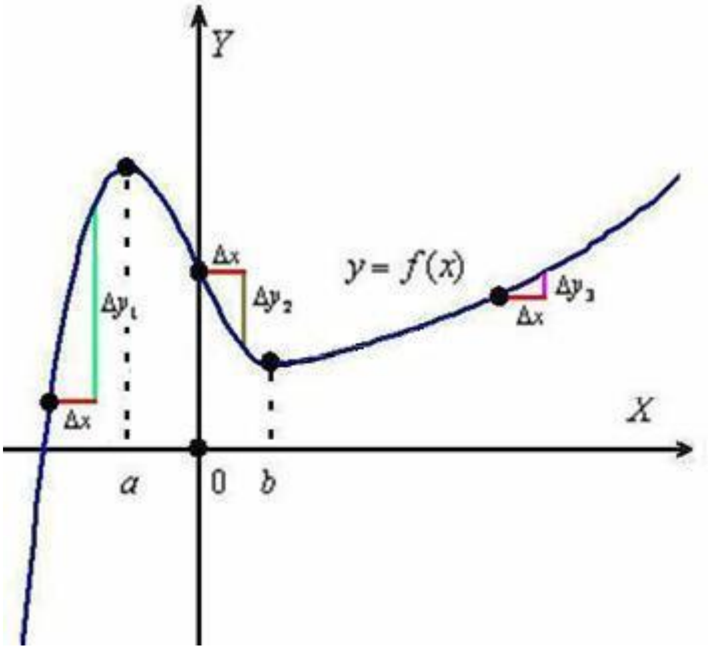
На интервалах $(-\infty; a), (b; +\infty)$ функция **возрастает**, то есть каждое следующее её значение **больше** предыдущего. Грубо говоря, график идёт *снизу вверх* (забираемся на горку). А на интервале $(a; b)$ функция **убывает** – каждое следующее значение **меньше** предыдущего, и наш график идёт *сверху вниз* (спускаемся по склону).

Также обратим внимание на особые точки. В точке $x = a$ мы достигаем **максимума**, то есть *существует* такой участок пути, на котором значение $f(a)$ будет самым большим (высоким). В точке же $x = b$ достигается **минимум**, и *существует* такая её окрестность, в которой значение $f(b)$ самое маленькое (низкое).

Более строгую терминологию и определения рассмотрим на уроке [об экстремумах функции](), а пока изучим ещё одну важную особенность: на промежутках $(-\infty; a), (b; +\infty)$ функция возрастает, но возрастает она **с разной скоростью**. И первое, что бросается в глаза – на интервале $(-\infty; a)$ график взмывает вверх *гораздо более круто*, чем на интервале $(b; +\infty)$. Нельзя ли измерить крутизну дороги с помощью математического инструментария?

Скорость изменения функции

Идея состоит в следующем: возьмём некоторое значение Δx *(читается «дельта икс»)*, которое назовём **приращением аргумента**, и начнём его «примерять» к различным точкам нашего пути:



1) Посмотрим на самую левую точку: минуя расстояние Δx, мы поднимаемся по склону на высоту Δy_1 (зелёная линия).
Величина Δy_1 называется **приращением функции**, и в данном случае это приращение положительно (разность значений по оси OY – больше нуля).
Составим отношение $\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$, которое и будет мерИлом крутизны нашей дороги.
Очевидно, что $\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ – это вполне конкретное число, и, поскольку оба приращения положительны, то $\frac{\Delta y_1}{\Delta x} > 0$.

Внимание! *Обозначение Δx являются* ***ЕДИНЫМ*** *символом, то есть нельзя «отрывать» «дельту» от «икса» и рассматривать эти буквы отдельно. Разумеется, комментарий касается и символа приращения функции.*

Исследуем природу полученной дроби содержательнее. Пусть изначально мы находимся на высоте 20 метров (в левой чёрной точке). Преодолев расстояние $\Delta x = 10$ метров (левая красная линия), мы окажемся на высоте 60 метров. Тогда приращение функции составит $\Delta y_1 = 60 - 20 = 40$ метров (зелёная линия) и: $\frac{\Delta y_1}{\Delta x} = \frac{40}{10} = 4$. Таким образом, **на каждом метре** этого участка дороги **высота увеличивается *в среднем* на 4 метра** …не забыли альпинистское снаряжение? =) Иными словами, построенное отношение характеризует СРЕДНЮЮ СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ (в данном случае – роста) функции.

***Примечание**: числовые значения рассматриваемого примера соответствуют пропорциям чертежа лишь приблизительно.*

2) Теперь пройдём то же самое расстояние Δx от самой правой чёрной точки. Здесь подъём более пологий, поэтому приращение Δy_3 (малиновая линия) относительно невелико, и отношение $\frac{\Delta y_3}{\Delta x}$ по сравнению с предыдущим случаем будет весьма скромным. Условно говоря, $\Delta x = 10, \quad \Delta y_3 = 5$ метров и **скорость роста функции** составляет $\frac{\Delta y_3}{\Delta x} = \frac{5}{10} = 0,5$. То есть, здесь на каждый метр пути приходится *в среднем* пол метра подъёма.

3) Маленькое приключение на склоне горы. Посмотрим на верхнюю чёрную точку, расположенную на оси ординат. Предположим, что это отметка 50 метров. Снова преодолеваем расстояние $\Delta x = 10$, в результате чего оказываемся ниже – на уровне 30-ти метров. Поскольку осуществлено движение **сверху вниз** (в «противоход» направлению оси OY), то итоговое **приращение функции (высоты) будет отрицательным**: $\Delta y_2 = 30 - 50 = -20$ метров (коричневый отрезок на чертеже). И в данном случае речь уже идёт о **скорости убывания** функции: $\frac{\Delta y_2}{\Delta x} = \frac{-20}{10} = -2$, то есть за каждый метр пути этого участка высота убывает *в среднем* на 2 метра. Берегите одежду на пятой точке.

Теперь зададимся вопросом: какое значение «измерительного эталона» Δx лучше всего использовать? Совершенно понятно, 10 метров – это весьма грубо. На них запросто уместится добрая дюжина кочек. Да что там кочки, внизу может быть глубокое ущелье, а через несколько метров – другая его сторона с дальнейшим отвесным подъёмом. Таким образом, при десятиметровом Δx мы не получим вразумительной характеристики подобных участков пути посредством отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Из проведённого рассуждения следует вывод – **чем меньше значение** Δx, тем точнее мы опишем рельеф дороги. Более того, справедливы следующие факты:

– **Для любой** точки подъемов $(-\infty; a), (b; +\infty)$ можно подобрать значение Δx (пусть и очень малое), которое умещается в границах того или иного подъёма. А это значит, что соответствующее приращение высоты Δy будет гарантированно положительным, и неравенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ корректно укажет рост функции в каждой точке этих интервалов.

– Аналогично, **для любой** точки склона $(a;b)$ существует значение Δx, которое полностью уместится на этом склоне. Следовательно, соответствующее приращение высоты Δy однозначно отрицательно, и неравенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ корректно покажет убыль функции в каждой точке данного интервала.

– Особо интересен случай, когда скорость изменения функции равна нулю: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Во-первых, нулевое приращение высоты ($\Delta y = 0$) – признак ровного пути. А во-вторых, есть другие любопытные ситуации, примеры которых вы видите на рисунке. Представьте, что судьба завела нас на самую вершину холма с парящими орлами или дно оврага с квакающими лягушками. Если сделать небольшой шажок Δx в любую сторону, то изменение высоты Δy будет ничтожно мало, и можно сказать, что скорость изменения функции $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ фактически нулевая. В точках $x = a, \quad x = b$ наблюдается именно такая картина.

Таким образом, мы подобрались к удивительной возможности идеально точно охарактеризовать скорость изменения функции. Ведь математический анализ позволяет устремить приращение аргумента к нулю: $\Delta x \to 0$, то есть сделать его бесконечно малым.

По итогу возникает ещё один закономерный вопрос: можно ли для дороги $y = f(x)$ и её графика найти **другую функцию**, которая **сообщала бы нам** обо всех ровных участках, подъёмах, спусках, вершинах, низинах, а также о скорости роста/убывания в каждой точке пути?

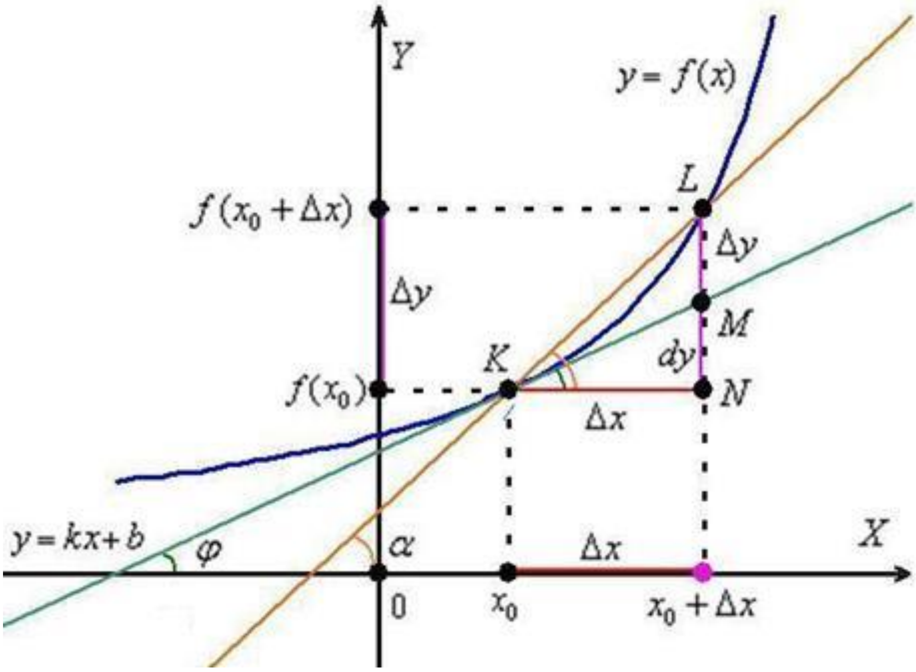
Что такое производная? Определение производной. Геометрический смысл производной и дифференциала

Пожалуйста, прочитайте вдумчиво и не слишком быстро – материал прост и доступен каждому! Ничего страшного, если местами что-то покажется не очень понятным, к статье всегда можно вернуться позже. Скажу больше, теорию полезно проштудировать несколько раз, чтобы качественно уяснить все моменты (совет особенно актуален для студентов-«технарей», у которых высшая математика играет значительную роль в учебном процессе).

По аналогии с непрерывностью, «раскрутка» производной начинается с её изучения в отдельно взятой точке:

Производная функции в точке

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ (синий график), которая определена и непрерывна на некотором интервале, **произвольную** точку x_0, принадлежащую данному интервалу, и соответствующее значение $f(x_0)$:



Зададим аргументу функции приращение Δx (красный отрезок) в точке x_0. Обратите внимание, что $x_0 + \Delta x$ – это тоже вполне определённая точка нашего интервала (на всякий случай отметил её малиновым цветом). И в этой точке существует своё значение функции $f(x_0 + \Delta x)$.

Приращение аргумента Δx повлекло за собой приращение функции:
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (малиновый отрезок)

В данном случае $\Delta y > 0$, поскольку в качестве примера выбран промежуток, на котором функция возрастает.

Давайте **сразу возьмём на заметку**, что нарисовалось в результате проделанных действий. Ну, конечно же, в глаза бросается *секущая* KL (коричневая прямая) и прямоугольный треугольник KLN.

Угол наклона секущей к оси OX я обозначил через α и отметил его коричневой дугой в двух местах. Такое внимание к данному углу не случайно – он однозначно определяется приращениями Δx и Δy. Рассмотрим прямоугольный треугольник KLN и угол $\alpha = \angle LKN$. Согласно школьному определению, тангенс угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему катету: $tg\,\alpha = \frac{LN}{KN} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Определение: производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx в этой точке при $\Delta x \to 0$. Или коротко:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если данный предел *конечен*, то функция $y=f(x)$ является **дифференцируемой** в точке x_0. А то, что в львиной доле случаев предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *существует и конечен*, скептики убедятся в самом ближайшем будущем.

И, конечно же, не забываем **о важнейшей особенности предела, как такового**: ПРИНЦИПИАЛЬНЫЙ МОМЕНТ состоит в том, что приращение аргумента стремится к нулю, но нуля не достигает, иными словами, величина Δx **бесконечно малА**, но не равна нулю!

Геометрический смысл производной

Пожалуйста, возьмите в руки обычную линейку и совместите её ребро с прямой LN.

Да-да – приложите прямо к экрану монитора, не комплексуйте =) Вместо линейки можно использовать тетрадку, лист бумаги или даже руку.

Теперь, согласно определению производной $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, медленно двигаем линейку **влево** к точке x_0, уменьшая тем самым приращение Δx. При этом приращение функции $\Delta y=LN$ тоже уменьшается: точка N будет *бесконечно близко* приближаться к точке K по горизонтали (красному отрезку), и точка L – *бесконечно близко* приближаться к той же точке K, но уже по графику функции $y=f(x)$ (синей линии).

В результате **секущая** KL **стремится занять положение касательной** $y=kx+b$ **к графику функции** $y=f(x)$ **в точке** x_0. Искомая касательная изображена зелёным цветом.

Таким образом, мы получили строгое определение касательной к графику функции:
Касательная к графику функции в точке – это предельное положение секущей в данной точке.

Вот что матан животворящий делает =)

Развиваем мысль дальше. Вспомним полученную ранее формулу тангенса угла наклона секущей $\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\alpha$ и осуществим в обеих её частях так называемый *предельный переход*.

В свете рассматриваемых событий (бесконечного уменьшения Δx и нахождения предела $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$) **угол наклона** α **секущей** KL **стремится к углу наклона** φ **касательной** $y=kx+b$ (последний дважды отмечен зелёными дугами). Аналогичное утверждение справедливо и для тангенсов данных углов: $tg\alpha\to tg\varphi$. В итоге:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\alpha\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\varphi$$

Вывод: производная функции в точке x_0 численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi$.

А тангенс угла наклона касательной – это в точности её угловой коэффициент:
$tg\varphi = k$

В курсе **аналитической геометрии** выведена формула, по которой можно составить **уравнение прямой с угловым коэффициентом**:
$y - y_0 = k(x - x_0)$

Учитывая полученное равенство $f'(x_0) = tg\varphi = k$, перепишем уравнение в виде $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Данной формулой мы уже активно пользовались, когда находили **уравнение касательной**, и сейчас стало ясно, откуда она взялась.

Существование производной в точке и непрерывность функции

По определению: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, следовательно, существование производной в точке x_0 тесно связано с существованием предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ в данной точке.

Я изо всех сил пытался отсрочить этот момент, чтобы не путать посетителей сайта, но рассказать всё равно придётся…. В определении производной **ВАЖНЕЙШИМ** является тот факт, что приращение аргумента Δx задаётся *и в другую сторону*. Возьмите карандаш и листок бумаги (не ленимся – так будет в 10 раз понятнее!!!!). Изобразите координатные оси, примерно такой же график функции $y = f(x)$ и точки $x_0, f(x_0)$.

Отложите на чертеже небольшой отрезок Δx **слева** от точки x_0. При этом точка $x_0 + \Delta x$ расположится *левее* точки x_0, а точка $f(x_0 + \Delta x)$ – *ниже* точки $f(x_0)$. Теперь проведите секущую графика функции $y = f(x)$ и начните мысленно уменьшать приращение Δx **вправо** к точке x_0. В результате данная секущая будет стремиться занять положение той же самой «зелёной» касательной!

Примечание: *приращение с левой стороны осуществляется «против оси абсцисс» и поэтому отрицательно:* $\Delta x < 0$. *Заметьте, что всё остаётся корректным, так, в нашем случае соответствующее приращение* Δy *тоже меньше нуля, и по этой причине левосторонний предел таки будет положительным* $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, *корректно показывая (как и его правосторонний коллега) рост функции в точке* x_0. *Односторонние* *пределы конечны и совпадают, что говорит о существовании общего предела, производной и единой касательной.*

Таким образом, существование производной в точке геометрически очень удобно ассоциировать с существованием ОБЩЕЙ КАСАТЕЛЬНОЙ в данной точке.

Очевидно, что функция не дифференцируема в **точках разрыва**. Во-первых, она может быть не определена в такой точке, следовательно, приращение Δx задать невозможно (на нет и суда нет). А во-вторых, практически всегда попросту не существует общего предела $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (по причине различных «нехорошестей» с односторонними пределами). Читатели, насмотревшиеся графиков разрывных функций (это намёк ;-) =)), легко представят проблему с общей касательной.

Вывод: из дифференцируемости функции в точке x_0 *необходимо* (обязательно) следует её **непрерывность** в данной точке.

Однако обратное утверждение в общем случае неверно, то есть **из непрерывности функции дифференцируемость следует далеко не всегда!** Классический пример, функция $y=|x|$ в точке $x_0=0$ *(чертёж есть в Примере 24 урока **о геометрических преобразованиях графика**)*. Если рассмотреть приращение Δx справа, то правосторонний предел будет равен $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, и, соответственно, получаем касательную $y=x$, совпадающую с правой частью графика $y=|x|$. Если же придать приращение аргументу Δx влево, получается совсем другой результат: $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$ и **другая** касательная $y=-x$, которая совпадает с левой частью графика $y=|x|$. Печалька. Ни общего предела, ни общей касательной. Таким образом, функция $y=|x|$ хоть и **непрерывна** в точке $x_0=0$, но не дифференцируема в ней! Подробное аналитическое доказательство проводится по шаблону Примера 11 статьи **Производная по определению**. Ещё один типичный образец есть в Примере 6 урока **Непрерывность функции**, где кусочно-заданная функция непрерывна на $\Re$. Однако не всё так безоблачно – она не дифференцируема в точках «стыка» графика.

В заключение параграфа немного об особых случаях.

Когда предел $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равен «плюс» или «минус бесконечности», то производная тоже существует и касательная к графику функции будет параллельная оси OY. Например, касательной к графику функции $y=\sqrt[3]{x}$ *(см. чертёж Примера 6 урока **Методы решения определённых интегралов**)* в точке $x_0 = 0$ является сама ось ординат. Более того, если односторонние пределы бесконечны и различны по знаку, то единая касательная и производная всё равно существуют! Пожалуйста: квадратный корень из модуля «икс» в той же точке $x_0 = 0$.

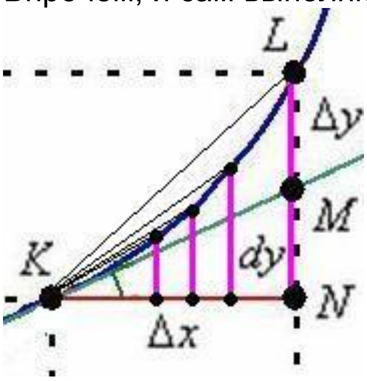
За более детальной и подробной информацией по сабжу можно обратиться, например, к первому тому Фихтенгольца. НедУрно издание 1962 года, закачивается без проблем.

Раз пошла такая пьянка...:

Дифференциал функции в точке и его геометрический смысл

Дифференциалом функции dy в точке x_0 называют *главную линейную* часть приращения функции Δy (строго говоря, его следовало обозначить $d[y(x_0)]$ или $d[f(x_0)]$). На чертеже дифференциал dy в точке x_0 равен **длине** отрезка NM.

Давайте снова возьмём в руки линейку и приложим её ребром к монитору на прямую LN. Двигая линейку влево к точке x_0, уменьшаем приращение Δx. Впрочем, и сам выполню несколько засечек:



По рисунку хорошо видно, что с уменьшением Δx уменьшается и приращение функции $\Delta y = LN$ (малиновые линии). При этом отрезок LM занимает всё меньшую и меньшую часть приращения функции $\Delta y = LN$, а наш дифференциал $dy = NM$ – всю бОльшую и бОльшую его часть, именно поэтому его и называют **главной частью** приращения функции. Настолько главной, что при [бесконечно малом](#) Δx дифференциал стремится к полному приращению функции: $dy \to \Delta y$ (соответственно отрезок LM будет бесконечно малым).

Нетрудно вывести формулу для [приближенных вычислений с помощью дифференциала](#). Рассмотрим прямоугольный треугольник KMN и тангенс угла наклона касательной $tg\varphi = \frac{MN}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x}$. Обозначив дифференциал в рассматриваемой точке x_0 корректнее через $d[f(x_0)]$, и учитывая, что $tg\varphi = f'(x_0)$, получаем:

$$dy = tg\varphi \cdot \Delta x$$
$$d[f(x_0)] = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

То есть идея формулы приближенных вычислений $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d\left[f(x_0)\right]$ состоит в том, чтобы точное значение $f(x_0+\Delta x)$ функции (смотрим на ось ординат основного чертёжа) заменить суммой $f(x_0)$ и отрезка $NM=dy=d\left[f(x_0)\right]$. К слову, отрезок NM на главном чертеже существенно «не достаёт» до полного приращения LN, и это не случайность. В демонстрационной иллюстрации я выбрал большое значении Δx, чтобы всё было видно. На практике же, чем приращение Δx меньше – тем дифференциал лучше «дотянется» до полного приращения функции (см. маленький рисунок), и тем точнее сработает формула $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d\left[f(x_0)\right]$.

Провернём ещё один неожиданный фокус с полученным равенством $d\left[f(x_0)\right]=f'(x_0)\cdot\Delta x$. *Предельно малое значение* Δx часто обозначают через dx, поэтому формула принимает вид $d\left[f(x_0)\right]=f'(x_0)\cdot dx$. Скинем dx в знаменатель противоположной части:

$$f'(x_0)=\frac{d\left[f(x_0)\right]}{dx}$$

Понятие производной функции

До сих пор речь шла о производной и дифференциале **в единственной** «подопытной» точке x_0. Но ведь в качестве x_0 можно взять ЛЮБУЮ ТОЧКУ x рассматриваемого интервала!

Из этих соображений в равенстве $f'(x_0)=\dfrac{d\left[f(x_0)\right]}{dx}$ проведём замену $x_0=x$ и получим $f'(x)=\dfrac{d\left[f(x)\right]}{dx}$. А это не что иное, как обозначение производной $y'=\dfrac{dy}{dx}$, о котором я упомянул на первом же уроке по технике дифференцирования.

Символ $\dfrac{dy}{dx}$ используется двояко – и как цельный символ производной, и как частное дифференциалов. Вторая интерпретация активно эксплуатируется в ходе решения дифференциальных уравнений.

Естественно, и в самом определении производной в точке $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ заменим x_0 на x:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

К чему мы пришли? А пришли мы к тому, что для функции $y=f(x)$ по закону $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ставится в соответствие **другая функция** $y'=f'(x)$, которая называется **производной функцией** (или просто **производной)**.

Производная $y'=f'(x)$ характеризует **скорость изменения** функции $y=f(x)$. Каким образом? Мысль идёт красной нитью с самого начала статьи.

Рассмотрим некоторую точку x_0 **области определения** функции $y=f(x)$. Пусть функция дифференцируема в данной точке. Тогда:

1) Если $f'(x_0)>0$, то функция $y=f(x)$ возрастает в точке x_0. И, очевидно, существует *интервал* (пусть даже очень малый), содержащий точку x_0, на котором функция $y=f(x)$ растёт, и её график идёт «снизу вверх».

2) Если $f'(x_0)<0$, то функция $y=f(x)$ убывает в точке x_0. И существует интервал, содержащий точку x_0, на котором функция $y=f(x)$ убывает (график идёт «сверху вниз»).

3) Если $f'(x_0)=0$, то *бесконечно близко* около точки x_0 функция $y=f(x)$ сохраняет свою скорость постоянной. Так бывает, как отмечалось, у функции-константы и ***в критических точках функции***, в частности ***в точках минимума и максимума***.

Немного семантики. Что в широком смысле обозначает глагол «дифференцировать»? Дифференцировать – это значит выделить какой-либо признак. Дифференцируя функцию $y=f(x)$, мы «выделяем» скорость её изменения в виде производной функции $y'=f'(x)$. А что, кстати, понимается под словом «производная»? Функция $y'=f'(x)$ *произошла* от функции $y=f(x)$.

Термины весьма удачно истолковывает механический смысл производной:
Рассмотрим закон изменения координаты тела $x(t)$, зависящий от времени t, и функцию скорости движения данного тела $v(t)$. Функция $v(t)$ характеризует скорость изменения координаты тела, поэтому является первой производной функции $x(t)$ по времени: $v(t)=x'_t(t)$. Если бы в природе не существовало понятия «движение тела», то не существовало бы и производного понятия «скорость тела».

Ускорение тела $a(t)$ – это скорость изменения скорости, поэтому: $a(t)=v'_t(t)=x''_{tt}(t)$. Если бы в природе не существовало исходных понятий «движение тела» и «скорость движения тела», то не существовало бы и производного понятия «ускорение тела».

Откуда взялись **правила дифференцирования и таблица производных**? Невероятно, но все они появились благодаря единственной формуле: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. И как это происходит, мы начнём разбирать прямо сейчас.

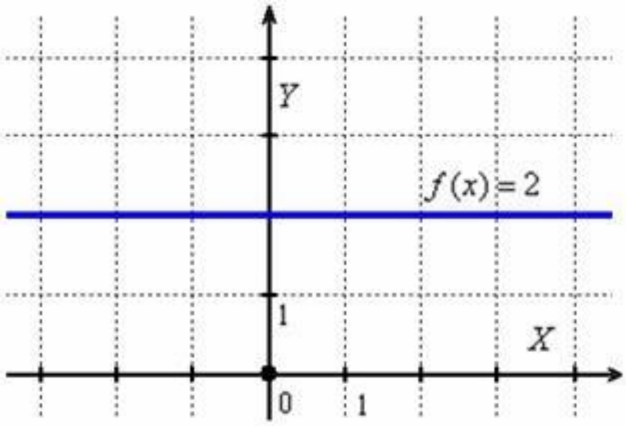
Действительно, пора переходить к практическим примерам. Ну а это был, пожалуй, первый обстоятельный теоретический материал, который я опубликовал на сайте – вполне можете взять для реферата или курсовика. Только аккуратнее, здесь есть зашифрованное послание для вашего преподавателя =)

Пример 1

Используя определение производной, доказать, что производная константы равна нулю.

Функция-константа имеет вид $f(x) = C$, и графически – это семейство прямых, параллельных оси абсцисс. Наверное, многие уже догадались, почему $f'(x) = (C)' = 0$.

Изобразим, например, график функции $f(x) = 2$:



Это «ровная дорога», то есть функция и не возрастает и не убывает в каждой точке. Ни вверх и не вниз.

Покажем аналитически, что производная функции-константы равна нулю. Рассмотрим произвольное значение x_0, в котором, понятно, $f(x_0) = C$. Придадим аргументу приращение: $x_0 + \Delta x$. Функция всё время постоянна, поэтому $f(x_0 + \Delta x) = C$ и приращение функции: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$. По определению производной в точке:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Заметьте, тут нет неопределённости: ноль, делённый на **бесконечно малое** число Δx, равен нулю. Пытливые читатели могут взять в руки калькулятор и убедиться в этом.

Поскольку в качестве точки x_0 можно взять *любое* «икс», то проведём замену $x_0 = x$ и получим: $f'(x) = 0$.

Пример 2

Найти производную функции $f(x) = -2x - 1$ по определению.

Рассмотрим произвольное значение x_0, в котором $f(x_0) = -2x_0 - 1$.

Зададим аргументу приращение Δx и вычислим соответствующее значение функции: $f(x_0 + \Delta x) = -2(x_0 + \Delta x) - 1 = -2x_0 - 2\Delta x - 1$ (обычная алгебра – в функцию $f(x) = -2x - 1$ вместо «икса» подставили $x_0 + \Delta x$ и раскрыли скобки).

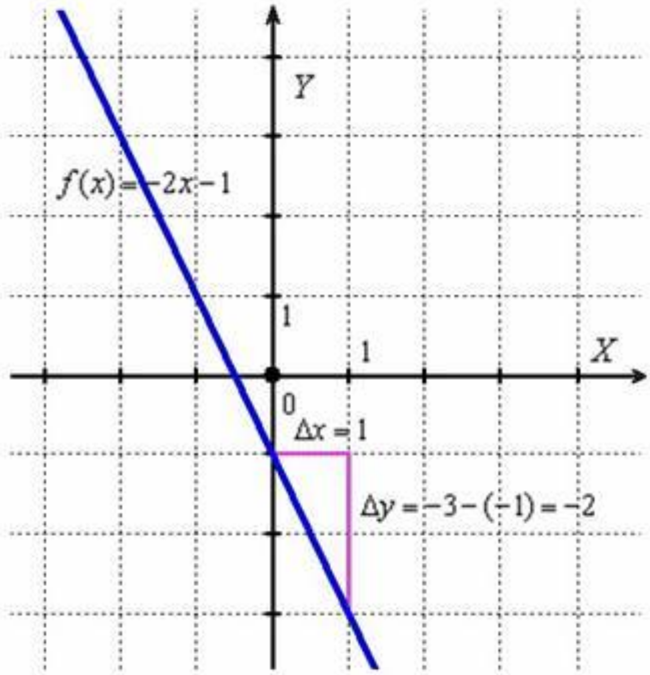
Вычислим приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -2x_0 - 2\Delta x - 1 - (-2x_0 - 1) = -2x_0 - 2\Delta x - 1 + 2x_0 + 1 = -2\Delta x$$

По определению производной в точке:
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2$$

Поскольку в качестве x_0 можно взять *любое* значение x, то $f'(x) = -2$.

О чём нам говорит найденная производная? Во-первых, для любого «икс» она отрицательна, а значит, функция $f(x) = -2x - 1$ **убывает** на всей области определения. И, во-вторых, это убывание постоянно, то есть «наклон горки везде одинаков» – в какой бы точке мы ни находились, предельное отношение $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2$ будет неизменным:



Здесь и далее я предполагаю, что читатель умеет находить, как минимум, **простые производные**, пользуясь **правилами дифференцирования и таблицей**. Давайте найдём производную «быстрым» способом: $f'(x) = (-2x - 1)' = -2 \cdot 1 - 0 = -2$

Теперь вам должно быть понятно происхождение и весь неформальный смысл полученного результата.

Используя этот же алгоритм, можно решить задачу в общем виде и доказать, что производная линейной функции $f(x) = kx + b$ равна её угловому коэффициенту:
$$f'(x) = (kx + b)' = k.$$

В начале статьи **Уравнение прямой на плоскости** я проанализировал расположение прямой в зависимости от углового коэффициента. И сейчас получено объяснение данных фактов с точки зрения математического анализа. Действительно, рассмотрим две линейные функции $f(x) = 3x - 2,\ g(x) = 20x$ и найдём их производные:
$$f'(x) = (3x - 2)' = 3$$
$$g'(x) = (20x)' = 20$$

Обе производные положительны, а значит, функции возрастают на всей области определения (графики идут «снизу вверх»). Кроме того, не забываем, что производная – это мера *скорости изменения* функции.

Поскольку $g'(x) > f'(x)$, то функция $g(x) = 20x$ растёт быстрее (причём, значительно) функции $f(x) = 3x - 2$, и, соответственно, график $g(x) = 20x$ намного более крут.

Факт тривиален, но озвучу: касательная к графику линейной функции в каждой точке совпадает с самим графиком данной линейной функции.

Заключительная демонстрационная задача, думаю, развеет все оставшиеся непонятки:

Пример 3

Найти производную функции $f(x) = x^2 + 2$ по определению.

Рассмотрим произвольную точку x_0 и соответствующее значение $f(x_0) = x_0^2 + 2$.
Зададим приращение Δx и вычислим значение функции в точке $x_0 + \Delta x$:
$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2$

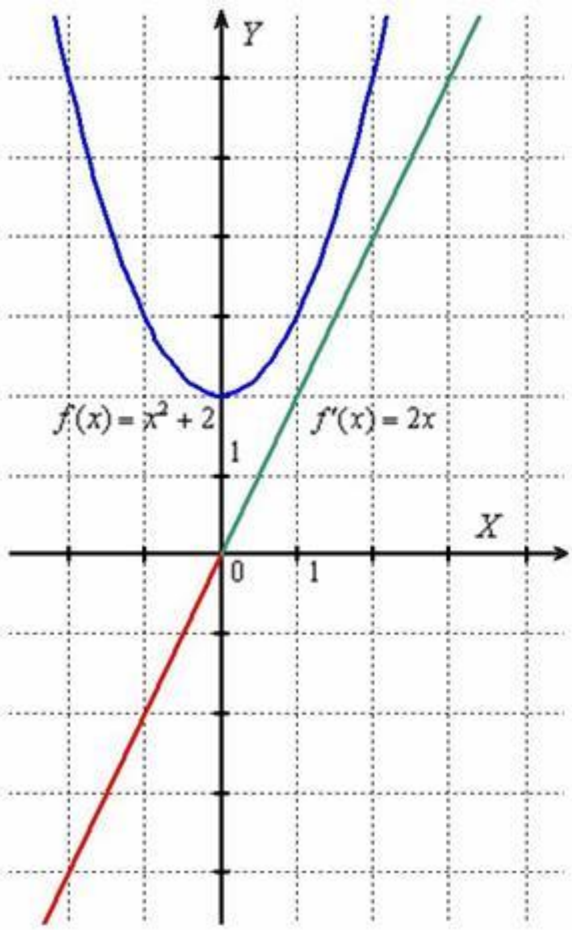
Найдём приращение функции:
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2 - (x_0^2 + 2) =$$
$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2 - x_0^2 - 2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

По определению производной в точке:
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x^{\to 0}) = 2x_0$$

Поскольку в качестве x_0 можно рассмотреть *любую* точку x **области определения** функции $f(x) = x^2 + 2$, то проведём замену $x_0 = x$ и получим $f'(x) = 2x$.

Проверим результат «лёгким» способом: $f'(x) = (x^2 + 2)' = 2x + 0 = 2x$

Исходная функция $f(x) = x^2 + 2$ и её производная $f'(x) = 2x$ – это две совершенно разные функции, однако между ними существует чёткая и прозрачная связь:



На интервале $(-\infty; 0)$ производная отрицательна: $f'(x) < 0$ (красная линия), что говорит об убывании функции $f(x)$ на данном интервале. Грубо говоря, ветвь параболы идёт сверху вниз. А на интервале $(0; +\infty)$ производная положительна: $f'(x) > 0$ (зелёная линия), значит, функция $f(x)$ растёт на этом интервале, и её график идёт снизу вверх.

При $x = 0$ производная равна нулю: $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$. Найденное значение показывает, что скорость изменения функции $f(x) = x^2 + 2$ в точке $x = 0$ равна нулю (функция не растёт в ней и не убывает). В данном случае здесь минимум функции.

Всё это можно утверждать даже не зная, что такое парабола и как выглядит график функции $f(x) = x^2 + 2$!

И ещё раз заостряю внимание, что значение производной в точке выражает собой некоторую меру *скорости изменения* функции в данной точке. Найдём несколько значений производной:

$f'(-0,5) = 2 \cdot (-0,5) = -1$

$f'(0) = 0$

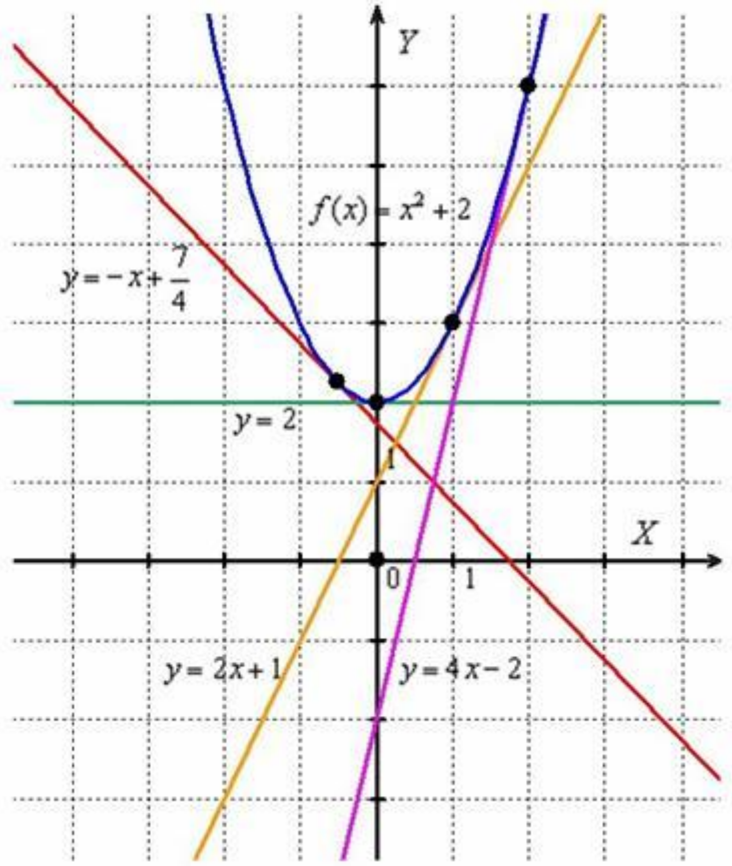
$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

Таким образом, в точке $x = -0,5$ функция $f(x) = x^2 + 2$ убывает, в точке $x = 0$ сохраняет скорость постоянной, а в точках $x = 1, x = 2$ – растёт.

Причём $f'(2) > f'(1)$, поэтому можно сказать (опять даже не зная чертежа!), что в окрестности точки $x = 2$ график функции $f(x) = x^2 + 2$ идёт вверх круче, чем вблизи точки $x = 1$.

Закрепим геометрический смысл: производная в точке численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке. Не поленюсь, применю формулу $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ четыре раза:



Вот так вот изящно производная характеризует свою функцию.

Наше увлекательное путешествие подошло к концу, и возникает вопрос: в каком направлении двигаться дальше? Это зависит от ваших сегодняшних потребностей:

– Можно потренироваться в **нахождении производной по определению**. И смех, и грех, но для применения формулы $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ опять же совсем не обязательно понимать, что это производная =)

– Можно отработать и окончательно уяснить геометрический смысл производной на уроке **Уравнения касательной и нормали**.

– И, наконец, можно перейти в следующий раздел – к статье об **экстремумах функции**, из-за которой на сайте, собственно, и появилась теория.

Желаю успехов!