

Добрый день,

Рассмотрите материал и попробуйте решить первые 5 задач

Срок сдачи – 15.01.2021г.

18. Комбинаторика. Размещения, перестановки, сочетания

В комбинаторике изучают вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).

Рождение комбинаторики как раздела **математики** связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Большой вклад в развитие комбинаторных методов внесли Г.В. Лейбниц, Я. Бернулли и Л. Эйлер.

Французский философ, писатель, математик и физик Блез Паскаль (1623–1662) рано проявил свои выдающиеся математические способности. Круг математических интересов Паскаля был весьма разнообразен. Паскаль доказал одну из основных теорем проективной геометрии (теорема Паскаля), сконструировал суммирующую машину (арифмометр Паскаля), дал способ вычисления биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля), впервые точно определил и применил для доказательства метод математической индукции, сделал существенный шаг в развитии анализа бесконечно малых, сыграл важную роль в зарождении теории вероятности. В гидростатике Паскаль установил ее основной закон (закон Паскаля). “Письма к провинциалу” Паскаля явились шедевром французской классической прозы.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед. В математике наряду с И. Ньютоном разработал дифференциальное и интегральное исчисление. Важный вклад внес в комбинаторику. С его именем, в частности, связаны теоретико-числовые задачи.

Готфрид Вильгельм Лейбниц имел мало внушительную внешность и поэтому производил впечатление довольно невзрачного человека. Однажды в Париже он зашел в книжную лавку в надежде приобрести книгу своего знакомого философа. На вопрос посетителя об этой книге книготорговец, осмотрев его с головы до ног, насмешливо бросил: “Зачем она вам? Неужели вы способны читать такие книги?” Не успел ученый ответить, как в лавку

вошел сам автор книги со словами: “Великому Лейбницу привет и уважение!” Продавец никак не мог взять в толк, что перед ним действительно знаменитый Лейбниц, книги которого пользовались большим спросом среди ученых.

Задачи.

1. Номера машин состоят из 3 букв русского алфавита (33 буквы) и 4 цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?
2. На рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?
3. Сколько есть шестизначных чисел, делящихся на 5?
4. Сколькими способами можно разложить 7 разных монет в три кармана?
5. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?
6. Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?
7. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр?
8. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисована окружность радиуса 100 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток может пересекать эта окружность?
9. Сколькими способами можно расставить в ряд числа так, чтобы числа стояли рядом и притом шли в порядке возрастания?
10. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр, если каждую цифру можно использовать только один раз?
11. Из слова РОТ перестановкой букв можно получить еще такие слова: ТОР, ОРТ, ОТР, ТРО, РТО. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова ЛОГАРИФМ?
12. Назовем *разбиением* натурального числа представление его в виде суммы натуральных чисел. Сколько существует различных разбиений числа на слагаемых?
13. Сколько существует трехзначных чисел с невозрастающим порядком цифр?
14. Сколько существует четырехзначных чисел с невозрастающим порядком цифр?
15. Сколькими способами можно рассадить в ряд 17 человек, чтобы и оказались рядом?
16. девочек и мальчиков рассаживаются произвольным образом в ряду из мест. Сколькими способами можно их рассадить так, чтобы никакие две девочки не сидели рядом?
17. девочек и мальчиков рассаживаются произвольным образом в ряду из мест. Сколькими способами можно их рассадить так, чтобы все девочки сидели рядом?

В разделе математики, который называется комбинаторикой, решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. Например, если взять 10 различных цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9 и составлять из них комбинации, то будем получать различные числа, например 143, 431, 5671, 1207, 43 и т.п.

Мы видим, что некоторые из таких комбинаций отличаются только порядком цифр (например, 143 и 431), другие - входящими в них цифрами (например, 5671 и 1207), третьи различаются и числом цифр (например, 143 и 43).

Таким образом, полученные комбинации удовлетворяют различным условиям.

В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: *перестановки, размещения, сочетания*.

Предварительно познакомимся с понятием *факториала*.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют *n - Факториалом* и пишут

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Пример 1. Вычислить: а) $3!$; б) $7! - 5!$; в) $\frac{7! + 5!}{6!}$.

Решение. а) $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

б) Так как $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ и $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, то можно вынести за скобки $5!$

Тогда получим

$$5!(6 \cdot 7 - 1) = 5! \cdot 41 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 41 = 120 \cdot 41 = 4920.$$

$$\text{в) } \frac{7! + 5!}{6!} = \frac{5!(6 \cdot 7 + 1)}{5! \cdot 6} = \frac{6 \cdot 7 + 1}{6} = \frac{43}{6}.$$

1. Перестановки.

Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

Перестановки обозначаются символом P_n , где n - число элементов, входящих в каждую перестановку. (P - первая буква французского слова *permutation*-перестановка).

Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

или с помощью факториала:

$$P_n = n!$$

Запомним, что $0!=1$ и $1!=1$.

Пример 2. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.,

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 .$$

2. Размещения.

Размещениями из m элементов в n в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

Размещения обозначаются символом A_m^n , где m - число всех имеющихся элементов, n - число элементов в каждой комбинации. (A -первая буква французского слова *arrangement*, что означает «размещение, приведение в порядок»).

При этом полагают, что $n \leq m$.

Число размещений можно вычислить по формуле

$$A_m^n = \underbrace{m \cdot (m-1)(m-2) \cdot \dots}_n,$$

т.е. число всех возможных размещений из m элементов по n равно произведению n последовательных целых чисел, из которых большее есть m .

Запишем эту формулу в факториальной форме:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} .$$

Пример 3. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е.,

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 .$$

3. Сочетания.

Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n , которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n -натуральные числа, причем $n \leq m$).

Число сочетаний из m элементов по n обозначаются C_m^n (С-первая буква французского слова *combination*- сочетание).

В общем случае число из m элементов по n равно числу размещений из m элементов по n , деленному на число перестановок из n элементов:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы, получим:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

Пример 4. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами.

Находим по первой формуле

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650 .$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n} \quad (0 \leq n \leq m)$$

(по определению полагают $C_n^n = 1$ и $C_n^0 = 1$);

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1} .$$