Добрый день,

Работы сдать -22.01.21г.по эл.почте.

Рассмотреть и законспектировать и

Ответить на вопросы:

1. Функция …
2. Числовая функция
3. 5 типов **элементарных функций**
4. Способы задания функции.
5. Понятие предела
6. что значит выражение «икс **стремится** к единице»?
7. Что такое $x \to \infty$?
8. Дан предел с большим числом вверху, то…

Функция (лат. *functio — исполнение, совершение*) — отношение между элементами, при котором изменение в одном элементе влечёт изменение в другом[1]:

Функция объекта - это **предназначение, которое он должен выполнять**. В дополнение к форме, материалу, структуре и т. д., является важной характеристикой объекта, который используется или должен/ может быть использованным.

- Функция в философии — обязанность, круг деятельности.
  - Функция — работа, производимая органом, организмом, прибором; роль, значение чего-либо; назначение чего-либо.
  - Функция — назначение персонажа в литературном произведении.
  - Социальная функция — использование того или иного механизма социальных взаимодействий для достижения определённой цели или реализации определённых ценностей.
- Функция в математике — закон зависимости одной величины от другой.
  - Функциональная зависимость в теории реляционных баз данных — отношение между атрибутами, характеризующее семантические ограничения хранимых данных.
- Функция в программировании — вид подпрограммы в информатике.

Фу́нкция (**отображе́ние**, **опера́тор**, **преобразова́ние**) — в математике соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

Математическое понятие функции выражает интуитивное представление о том, как одна величина полностью определяет значение другой величины. Так,

значение переменной однозначно определяет значение выражения , также значение месяца однозначно определяет значение следующего за ним месяца. Другой пример функции: каждому человеку можно однозначно поставить в соответствие его биологическую мать.

Аналогично, задуманный заранее алгоритм по значению входного данного выдаёт значение выходного данного.

Часто под термином «функция» понимается числовая функция, то есть функция, которая ставит одни числа в соответствие другим. Эти функции удобно представлять в виде графиков.

Термин «функция» (в некотором более узком смысле) был впервые использован Лейбницем (1692 год). В свою очередь, Иоганн Бернулли в письме к тому же Лейбницу употребил этот термин в смысле, более близком к современному[1][2].

Первоначально понятие функции было неотличимо от понятия аналитического представления. Впоследствии появилось определение функции, данное Эйлером (1751 год), затем — у Лакруа (1806 год), — уже практически в современном виде. Наконец, общее определение функции (в современной форме, но для числовых функций) было дано Лобачевским (1834 год) и Дирихле (1837 год)[3].

К концу XIX века понятие функции переросло рамки числовых систем. Сначала понятие функции было распространено на векторные функции, вскоре Фреге ввёл логические функции (1879), а после появления теории множеств Дедекинд (1887) и Пеано (1911) сформулировали современное универсальное определение[2].

https://ru.wikipedia.org/ - посмотрите.

Содержание

---

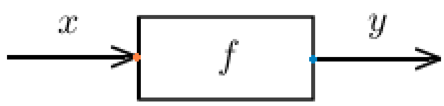
https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/funkcii-i-grafiki-proizvodnaya-i-pervoobraznaya

Понятие *функции* – одно из основных в математике.
На уроках математики вы часто слышите это слово. Вы строите графики функций, занимаетесь исследованием функции, находите наибольшее или наименьшее значение функции. Но для понимания всех этих действий давайте определим, что такое функция.

Существует всего 5 типов **элементарных функций**. Это степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Определение функции можно дать несколькими способами. Все они будут дополнять друг друга.

- 1. Функция – это *зависимость одной переменной величины от другой*. Другими словами, *взаимосвязь* между величинами.
Любой физический закон, любая формула отражает такую взаимосвязь величин. Например, формула $p = \rho g h$ – это зависимость давления жидкости p от глубины h.
Чем больше глубина, тем больше давление жидкости. Можно сказать, что давление жидкости является функцией от глубины, на которой его измеряют.
Знакомое вам обозначение $y = f(x)$ как раз и выражает идею такой зависимости одной величины от другой. Величина у зависит от величины x по определенному закону, или правилу, обозначаемому f.
Другими словами: меняем x (независимую переменную, или *аргумент*) – и по определенному правилу меняется y.
Совсем необязательно обозначать переменные x и y.
Например, $L(t) = L_0(1 + \alpha t)$ – зависимость длины L от температуры t, то есть закон теплового расширения. Сама запись $L(t)$ означает, что величина L зависит от t.
2. Можно дать и другое определение.
- Функция – это определенное *действие* над переменной.
Это означает, что мы берем величину x, делаем с ней определенное действие (например, возводим в квадрат или вычисляем ее логарифм) – и получаем величину y.
- В технической литературе встречается определение функции как устройства, на вход которого подается x – а на выходе получается y.



- Итак, функция – это *действие* над переменной. В этом значении слово «функция» применяется и в областях, далеких от математики. Например, можно говорить о функциях мобильного телефона, о функциях головного мозга или функциях депутата. Во всех этих случаях речь идет именно о совершаемых действиях.
3. Дадим еще одно определение функции – то, что чаще всего встречается в учебниках.
- *Функция – это соответствие между двумя множествами, причем каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.*
Например, функция $y = 2x$ каждому действительному числу x ставит в соответствие число в два раза большее, чем x.

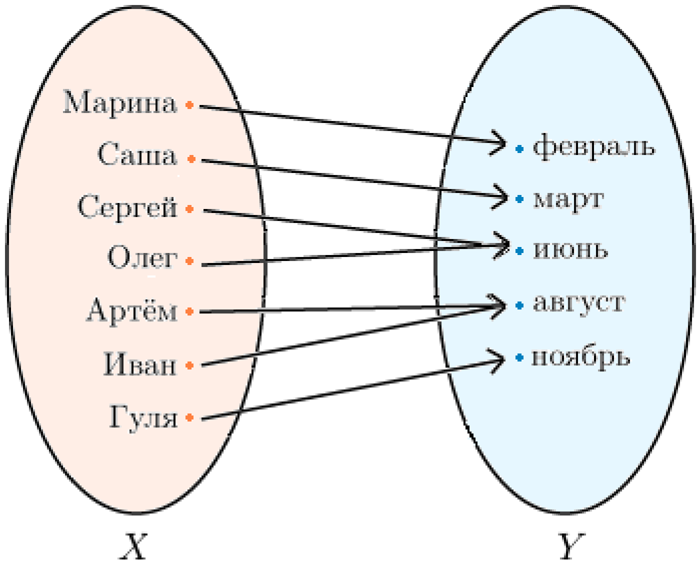
Повторим еще раз: каждому элементу множества X по определенному правилу мы ставим в соответствие элемент множества Y.
Множество X называется *областью определения функции*.
Множество Y – *областью значений*.
Но зачем здесь такое длинное уточнение: «каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго»?
Оказывается, что соответствия между множествами тоже бывают разные.

Рассмотрим в качестве примера соответствие между двумя множествами – гражданами России, у которых есть паспорта, и номерами их паспортов. Ясно, что это соответствие взаимно-однозначное – у каждого гражданина только один российский паспорт. И наоборот – по номеру паспорта можно найти человека.

В математике тоже есть такие взаимно-однозначные функции. Например, линейная функция $y = 3x + 2$. Каждому значению x соответствует одно и только одно значение y. И наоборот – зная y, можно однозначно найти x.

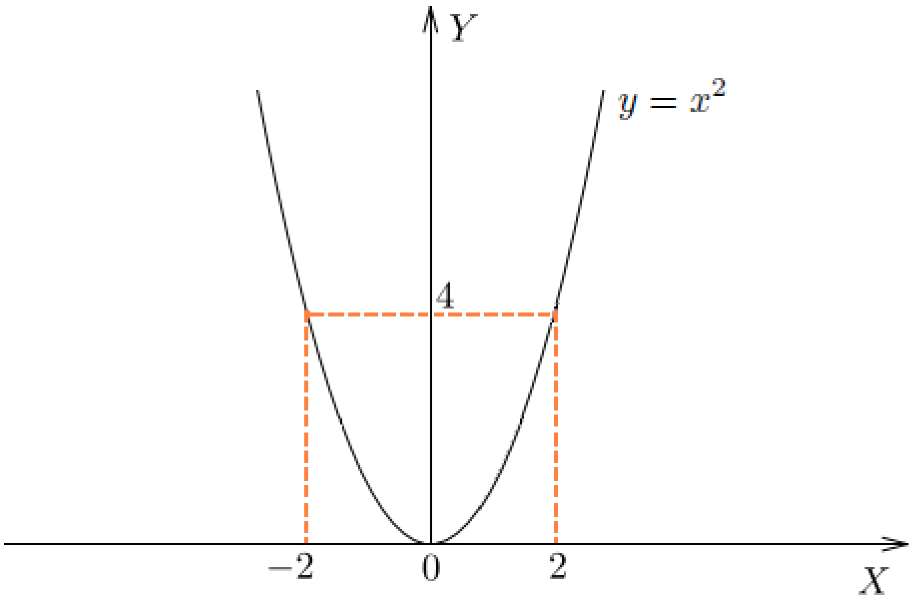
x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = 3x + 2$	-7	-4	-1	2	5	8

Могут быть и другие типы соответствий между множествами. Возьмем для примера компанию друзей и месяцы, в которые они родились:

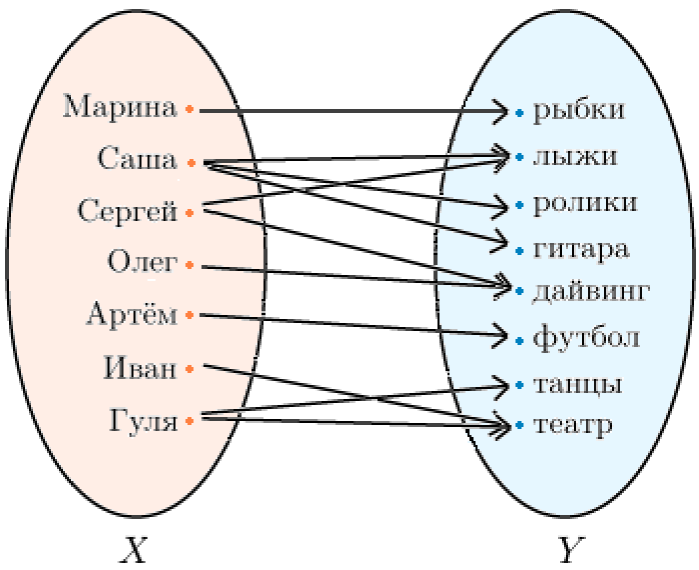


Каждый человек родился в какой-то определенный месяц. Но данное соответствие не является взаимно-однозначным. Например, в июне родились Сергей и Олег.

Пример такого соответствия в математике – функция $y = x^2$. Один и тот же элемент второго множества $y = 4$ соответствует двум разным элементам первого множества: $x = 2$ и $x = -2$.

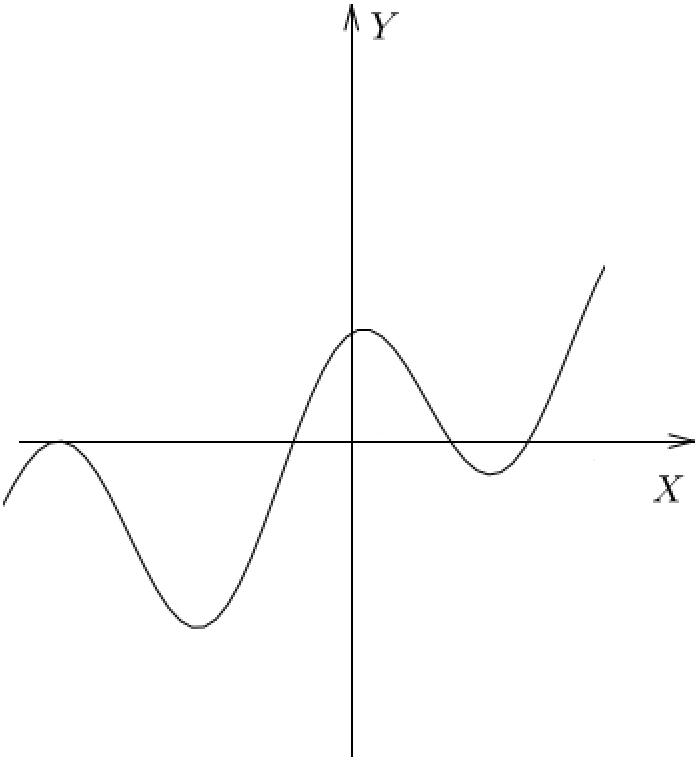


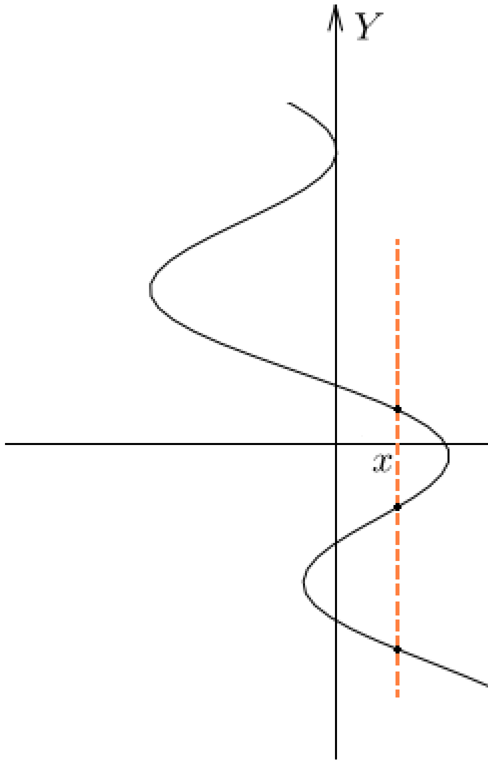
А каким должно быть соответствие между двумя множествами, чтобы оно не являлось функцией? Очень просто! Возьмем ту же компанию друзей и их хобби:



Мы видим, что в первом множестве есть элементы, которым соответствует два или три элемента из второго множества.
Очень сложно было бы описать такое соответствие математически, не правда ли?

- Вот другой пример. На рисунках изображены кривые. Как вы думаете, какая из них является графиком функции, а какая – нет?





Ответ очевиден. Первая кривая – это график некоторой функции, а вторая – нет. Ведь на ней есть точки, где каждому значению x соответствует не одно, а целых три значения y.

Перечислим *способы задания функции*.

- 1. С помощью формулы. Это удобный и привычный для нас способ. Например:
  $y = \cos x$,
  $y = x^3 - 2x^2$,
  $z = f(t)$,
  $L(t) = L_0(1 + \alpha t)$.
  Это примеры функций, заданных формулами.
- 2. Графический способ. Он является самым наглядным. На графике сразу видно все – возрастание и убывание функции, наибольшие и наименьшие значения, точки максимума и минимума. В следующей статье будет рассказано об исследовании функции с помощью графика.
  К тому же не всегда легко вывести точную формулу функции. Например, курс доллара (то есть зависимость стоимости доллара от времени) можно показать только на графике.
- 3. С помощью таблицы. С этого способа вы когда-то начинали изучение темы «Функция» - строили таблицу и только после этого – график. А при экспериментальном исследовании какой-либо новой закономерности, когда еще неизвестны ни формула, ни график, этот способ будет единственно возможным.
- 4. С помощью описания. Бывает, что на разных участках функция задается разными формулами. Известная вам функция $y = |x|$ задается описанием:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

http://mathprofi.ru/predely_po_koshi.html

Пределы функций

1. Понять, что такое предел.
2. Научиться решать основные типы пределов.

Прошу прощения за некоторую не научность объяснений, важно чтобы материал был понятен даже чайнику, что, собственно, и является задачей проекта.

Итак, что же такое предел?

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$$

Любой предел состоит из трех частей:

1) Всем известного значка предела $\lim$.
2) Записи под значком предела, в данном случае $x \to 1$. Запись читается «икс стремится к единице». Чаще всего – именно x , хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. В практических заданиях на месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность (∞).

3) Функции под знаком предела, в данном случае $\frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$.

Сама запись $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$ читается так: «предел функции $\frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$ при икс стремящемся к единице».

Разберем следующий важный вопрос – а что значит выражение «икс **стремится** к единице»? И что вообще такое «стремится»?
Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, **динамическое**.
Построим последовательность: сначала $x = 1{,}1$, затем $x = 1{,}01$, $x = 1{,}001$, …, $x = 1{,}00000001$, ….
То есть выражение «икс **стремится** к единице» следует понимать так – «икс» последовательно принимает значения, **которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают**.

Как решить вышерассмотренный пример? Исходя из вышесказанного, нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 5}{1 + 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Готово.

Итак, первое правило: **Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию**.

Мы рассмотрели простейший предел, но и такие встречаются на практике, причем, не так уж редко!

Пример с бесконечностью:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)$$

Разбираемся, что такое $x\to\infty$? Это тот случай, когда x неограниченно возрастает, то есть: сначала $x=10$, потом $x=100$, потом $x=1000$, затем $x=10000000$ и так далее до бесконечности.

А что в это время происходит с функцией $1-x$?
$1-10=-9$, $1-100=-99$, $1-1000=-999$, …

Итак: если $x\to\infty$, то функция $1-x$ стремится к минус бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)=-\infty$$

Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию $(1-x)$ бесконечность и получаем ответ.

Еще один пример с бесконечностью:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x-3)$$

Опять начинаем увеличивать x до бесконечности и смотрим на поведение функции:

$$\text{если}\ \ x=10,\ \text{то}\ \ 10^2-2\cdot10-3=77$$

$$\text{если}\ \ x=100,\ \text{то}\ \ 100^2-2\cdot100-3=9797$$

$$\text{если}\ \ x=1000,\ \text{то}\ \ 1000^2-2\cdot1000-3=997997$$

…

Вывод: при $x\to\infty$ функция x^2-2x-3 неограниченно возрастает:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x-3)=\infty$$

И еще серия примеров:

Пожалуйста, попытайтесь самостоятельно мысленно проанализировать нижеследующее и запомните простейшие виды пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-99}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{-3}{x^3}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^4+x-9}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5}{4^x}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0,\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+7}}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{12}{\ln x}=0$$

Если где-нибудь есть сомнения, то можете взять в руки калькулятор и немного потренироваться.

В том случае, если $x\to\infty$, попробуйте построить последовательность $x=10$, $x=100$, $x=1000$. Если $x\to0$, то $x=0{,}1$, $x=0{,}01$, $x=0{,}001$.

! Примечание*: строго говоря, такой подход с построением последовательностей из нескольких чисел некорректен, но для понимания простейших примеров вполне подойдет.*

Также обратите внимание на следующую вещь. Даже если дан предел с большим числом вверху, да хоть с миллионом: $\lim_{x\to\infty}\frac{1000000}{x}$, то все равно $\lim_{x\to\infty}\frac{1000000}{x}=0$, **так как рано или поздно «икс» начнёт принимать такие гигантские значения, что миллион по сравнению с ними будет самым настоящим микробом**.

Что нужно запомнить и понять из вышесказанного?

1) Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.

2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как $\lim_{x\to\infty}(x^4+8x+10)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$, $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$ **и т.д.**

Более того, у предела есть очень хороший геометрический смысл. Для лучшего понимания темы рекомендую ознакомиться с методическим материалом **Графики и свойства элементарных функций**. После прочтения этой статьи вы не только окончательно поймете, что такое предел, но и познакомитесь с интересными случаями, когда предела функции вообще **не существует**!

На практике, к сожалению, подарков немного. А поэтому переходим к рассмотрению более сложных пределов. Кстати, по этой теме есть **интенсивный курс** в pdf-формате, который особенно полезен, если у Вас ОЧЕНЬ мало времени на подготовку. Но материалы сайта, разумеется, не хуже:

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда $x\to\infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

Пример:

Вычислить предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Можно было бы подумать, что $\frac{\infty}{\infty}=\infty$, и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить некоторый прием решения, который мы сейчас и рассмотрим.

Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени**.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Вот оно как, ответ $\frac{2}{3}$, а вовсе не бесконечность.

Что принципиально важно в оформлении решения?

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Я обычно использую знак $(*)$, он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения.

В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так:

$$\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\,0}-\dfrac{5}{x^2}^{\,0}}{\dfrac{1}{x^2}^{\,0}+\dfrac{1}{x}^{\,0}+3}$$

Для пометок лучше использовать простой карандаш.

Конечно, можно ничего этого не делать, но тогда, возможно, преподаватель отметит недочеты в решении либо начнет задавать дополнительные вопросы по заданию. А оно Вам надо?

<u>Пример 2</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Снова в числителе и знаменателе находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Максимальная степень в числителе: 3

Максимальная степень в знаменателе: 4

Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на x^4.

Полное оформление задания может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\frac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}^{\to 0}+\frac{15}{x^2}^{\to 0}+\frac{9}{x^3}^{\to 0}+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\frac{6}{x^2}^{\to 0}-\frac{3}{x^3}^{\to 0}-\frac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

<u>Пример 3</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Максимальная степень «икса» в числителе: 2

Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (x можно записать как x^1)

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

Предвосхищаю вопрос от чайников: «Почему здесь деление на ноль? На ноль же делить нельзя!». Смысл записи 0:0 будет понятен позже, после ознакомления с четвёртым уроком о **бесконечно малых функциях**. А пока всем начинающим изучать математический анализ предлагаю читать далее.

Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

<u>Пример 4</u>

Решить предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения. Если данные вещи позабылись, тогда посетите страницу **Математические формулы и таблицы** и ознакомьтесь с методическим материалом *Горячие формулы школьного курса математики*. Кстати его лучше всего распечатать, требуется очень часто, да и информация с бумаги усваивается лучше.

Итак, решаем наш предел

$$\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$$2x^2-3x-5=0$$

Сначала находим дискриминант:

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$.

В случае если дискриминант большой, например 361, используем калькулятор, функция извлечения квадратного корня есть на самом простом калькуляторе.

! Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка.

Далее находим корни:

$$x_1 = \frac{-(-3)-7}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3)+7}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = 2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+1)\cdot(2x-5)$$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$(*) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = (*)$$

Очевидно, что можно сократить на $(x+1)$:

$$(*) = \lim_{x\to -1}(2x-5) = (*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$= 2\cdot(-1) - 5 = -2 - 5 = -7$$

Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение никогда не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель на множители.

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-5) = 9 + 40 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-3)-7}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3)+7}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+1)\cdot(2x-5)$$

$$(*) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(2x-5) = -2 - 5 = -7$$

<u>Пример 5</u>

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$

Сначала «чистовой» вариант решения

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель: $8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$
Знаменатель:
$x^2+4x-12=0$
$D=16+48=64$
$\sqrt{D}=8$
$x_1=\dfrac{-4-8}{2}=-6$, $x_2=\dfrac{-4+8}{2}=2$
$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

Что важного в данном примере?
Во-первых, Вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель, сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов. Уж эту-то формулу нужно знать и видеть.

Рекомендация: **Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем.**
Более того, такие числа целесообразно выносить за значок предела. Зачем? Да просто чтобы они не мешались под ногами. Главное, потом эти числа не потерять по ходу решения.

Обратите внимание, что на заключительном этапе решения я вынес за значок предела двойку, а затем – минус.

! Важно

В ходе решения фрагмент типа $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x-2}$ *встречается очень часто. Сокращать такую дробь* ***нельзя****. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).*
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x-2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(-1)=-1$ *, то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.*

Вообще, я заметил, что чаще всего в нахождении пределов данного типа приходится решать два квадратных уравнения, то есть и в числителе и в знаменателе находятся квадратные трехчлены.

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни.

<u>Пример 6</u>

Найти предел $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Начинаем решать.

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела
Еще раз повторяю – это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела. Данное действие обычно проводится мысленно или на черновике.

$$\frac{\sqrt{3+6} - \sqrt{10 \cdot 3 - 21}}{5 \cdot 3 - 15} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{9}}{15-15} = \frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Как Вы, наверное, заметили, у нас в числителе находится разность корней. А от корней в математике принято, по возможности, избавляться. Зачем? А без них жизнь проще.

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение**.

Вспоминаем нашу нетленную формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

И смотрим на наш предел: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Что можно сказать? $(a-b)$ у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать $(a+b)$ (которое и называется **сопряженным выражением**).

Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{5x-15}$$

Обратите внимание, что под корнями при этой операции мы ничего не трогаем.

Хорошо, $(a+b)$ мы организовали, но выражение-то под знаком предела изменилось! А для того, чтобы оно не менялось, нужно его разделить на то же самое, т.е. на $(a+b)$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

То есть, **мы умножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение**.
В известной степени, это искусственный прием.

Умножили. Теперь самое время применить вверху формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с **суммой** корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})}=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)}=$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{5x-15}=(*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители и сократить «виновников» неопределённости, ну а предел константы – равен самой константе:

$$(*)=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right)=-\frac{3}{10}$$

Готово.

Как должно выглядеть решение данного примера в чистовом варианте? Примерно так:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3}+\sqrt{10x-21}^{\to 3})} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(x-3)} =$$

$$= \frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}$$

<u>Пример 7</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$

Сначала попробуйте решить его самостоятельно.

Окончательное решение примера может выглядеть так:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель на множители:

$x^2+x-2=0$

$D=1+8=9$

$\sqrt{D}=3$

$x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$

$x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение

$$(*) = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}^{\to 2}+2)}{x+6-4} = 4\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2} =$$

$$= 4\lim_{x\to -2}(x-1) = 4\cdot(-3) = -12$$

Спасибо за внимание.