

## КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Формулы и принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин.

Это, в свою очередь, позволяет исследовать закономерности массовых случайных явлений, что является весьма важным для правильного понимания статистических закономерностей, проявляющихся в природе и технике.

### Правила сложения и умножения в комбинаторике

**Правило суммы.** Если два действия А и В взаимно исключают друг друга, причем действие А можно выполнить  $m$  способами, а В –  $n$  способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо А, либо В) можно  $n + m$  способами.

#### Пример 1.

В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?

*Решение*

Дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку, т.е. дежурным может быть любой из 16 мальчиков, либо любая из 10 девочек.

По правилу суммы получаем, что одного дежурного можно назначить  $16+10=26$  способами.

**Правило произведения.** Пусть требуется выполнить последовательно  $k$  действий. Если первое действие можно выполнить  $n_1$  способами, второе действие  $n_2$  способами, третье –  $n_3$  способами и так до  $k$ -го действия, которое можно выполнить  $n_k$  способами, то все  $k$  действий вместе могут быть выполнены:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

способами.

#### Пример 2.

В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить двух дежурных?

*Решение*

Первым дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку. Т.к. в классе учится 16 мальчиков и 10 девочек, то назначить первого дежурного можно  $16+10=26$  способами.

После того, как мы выбрали первого дежурного, второго мы можем выбрать из оставшихся 25 человек, т.е. 25-ю способами.

По теореме умножения двое дежурных могут быть выбраны  $26 \cdot 25 = 650$  способами.

### Сочетания без повторений. Сочетания с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать  $m$  из  $n$  различных предметов?

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

#### Пример 3.

Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

*Решение*

Нам из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = 210$$

Рассмотрим задачу о числе сочетаний с повторениями: имеется по  $r$  одинаковых предметов каждого из  $n$  различных типов; сколькими способами можно выбрать  $m$  ( $m \leq r$ ) из этих  $(n \cdot r)$  предметов?

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

#### Пример 4.

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

*Решение*

Т.к. среди 7 пирожных могут быть пирожные одного сорта, то число способов, которыми можно купить 7 пирожных, определяется числом сочетаний с повторениями из 7 по 4.

$$\bar{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

### Размещения без повторений. Размещения с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить

вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по  $t$  различным местам  $m$  из  $n$  различных предметов?

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

#### Пример 5.

В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

*Решение.*

В данной задаче мы не просто выбираем фотографии, а размещаем их на определенных страницах газеты, причем каждая страница газеты должна содержать не более одной фотографии. Таким образом, задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента:

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

Также классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить

вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по  $t$  различным местам  $m$  из  $n$  предметов, среди которых есть одинаковые?

$$\bar{A}_n^m = n^m$$

#### Пример 6.

У мальчика остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 3 и 7. Он решил с помощью этих штампов нанести на все книги пятизначные номера— составить каталог. Сколько различных пятизначных номеров может составить мальчик?

*Решение*

Можно считать, что опыт состоит в 5-кратном выборе с возвращением одной из 3 цифр (1, 3, 7). Таким образом, число пятизначных номеров определяется числом размещений с повторениями из 3 элементов по 5:

$$\bar{A}_3^5 = 3^5 = 243.$$

### Перестановки без повторений. Перестановки с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно разместить  $n$  различных предметов на  $n$  различных местах?

$$P_n = n!$$

**Пример 7.**

Сколько можно составить четырехбуквенных «слов» из букв слова «брак»?

*Решение*

Генеральной совокупностью являются 4 буквы слова «брак» (б, р, а, к). Число «слов» определяется перестановками этих 4 букв, т. е.

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Для случая, когда среди выбираемых  $n$  элементов есть одинаковые (выборка с возвращением), задачу о числе перестановок с повторениями можно выразить вопросом: сколькими способами можно переставить  $n$  предметов, расположенных на  $n$  различных местах, если среди  $n$  предметов имеются  $k$  различных типов ( $k < n$ ), т. е. есть одинаковые предметы.

$$\bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

**Пример 8.**

Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

*Решение*

Здесь 1 буква «м», 4 буквы «и», 3 буквы «с» и 1 буква «п», всего 9 букв. Следовательно, число перестановок с повторениями равно

$$\bar{P}_9(1, 4, 3, 1) = \frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = 2520.$$

**ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ПО РАЗДЕЛУ "КОМБИНАТОРИКА"**

