Перестановки, сочетания и размещения без повторений

Не пугайтесь малопонятных терминов, тем более, некоторые из них действительно не очень удачны. Начнём с хвоста заголовка – что значит «**без повторений**»? Это значит, что в данном параграфе будут рассматриваться множества, которые состоят из **различных** объектов. Например, … нет, кашу с паяльником и лягушкой предлагать не буду, лучше что-нибудь повкуснее =) Представьте, что перед вами на столе материализовалось яблоко, груша и банан (при наличии таковых ситуацию можно смоделировать и реально). Выкладываем фрукты слева направо в следующем порядке:

яблоко / груша / банан

Вопрос первый: сколькими способами их можно переставить?

Одна комбинация уже записана выше и с остальными проблем не возникает:

яблоко / банан / груша
груша / яблоко / банан
груша / банан / яблоко
банан / яблоко / груша
банан / груша / яблоко

Итого: 6 комбинаций или 6 **перестановок**.

Хорошо, здесь не составило особого труда перечислить все возможные случаи, но как быть, если предметов больше? Уже с четырьмя различными фруктами количество комбинаций значительно возрастёт!

Пожалуйста, откройте справочный материал **Основные формулы комбинаторики** *(методичку удобно распечатать)* и в пункте № 2 найдите формулу количества перестановок.

Никаких мучений – 3 объекта можно переставить $P_3 = 3! = 6$ способами.

Вопрос второй: сколькими способами можно выбрать а) один фрукт, б) два фрукта, в) три фрукта, г) хотя бы один фрукт?

Зачем выбирать? Так нагуляли же аппетит в предыдущем пункте – для того, чтобы съесть! =)

а) Один фрукт можно выбрать, очевидно, тремя способами – взять либо яблоко, либо грушу, либо банан. Формальный подсчёт проводится по **формуле количества сочетаний**:

$$C_3^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$$

Запись C_3^1 в данном случае следует понимать так: «сколькими способами можно выбрать 1 фрукт из трёх?»

б) Перечислим все возможные сочетания двух фруктов:

яблоко и груша;
яблоко и банан;
груша и банан.

Количество комбинаций легко проверить по той же формуле:
$$C_3^2 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$$

Запись C_3^2 понимается аналогично: «сколькими способами можно выбрать 2 фрукта из трёх?».

в) И, наконец, три фрукта можно выбрать единственным способом:
$$C_3^3 = \frac{3!}{0!\cdot 3!} = 1$$

Кстати, формула количества сочетаний сохраняет смысл и для пустой выборки:
$C_3^0 = \frac{3!}{3!\cdot 0!} = 1$ способом можно выбрать ни одного фрукта – собственно, ничего не взять и всё.

г) Сколькими способами можно взять **хотя бы один** фрукт? Условие «хотя бы один» подразумевает, что нас устраивает 1 фрукт (любой) или 2 любых фрукта или все 3 фрукта:
$C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 3 + 3 + 1 = 7$ способами можно выбрать хотя бы один фрукт.

Читатели, внимательно изучившие вводный урок по **теории вероятностей**, уже кое о чём догадались. Но о смысле знака «плюс» позже.

Для ответа на следующий вопрос мне требуется два добровольца… …Ну что же, раз никто не хочет, тогда буду вызывать к доске =)

Вопрос третий: сколькими способами можно раздать по одному фрукту Даше и Наташе?

Для того чтобы раздать два фрукта, сначала нужно их выбрать. Согласно пункту «бэ» предыдущего вопроса, сделать это можно $C_3^2 = 3$ способами, перепишу их заново:

яблоко и груша;
яблоко и банан;
груша и банан.

Но комбинаций сейчас будет в два раза больше. Рассмотрим, например, первую пару фруктов:
яблоком можно угостить Дашу, а грушей – Наташу;
либо наоборот – груша достанется Даше, а яблоко – Наташе.

И такая перестановка возможна для каждой пары фруктов.

В данном случае работает **формула количества размещений**:
$$A_3^2 = 2\cdot 3 = 6$$

Она отличается от формулы C_3^2 тем, что учитывает **не только** количество способов, которым можно выбрать несколько объектов, но и все перестановки объектов **в каждой** возможной выборке. Так, в рассмотренном примере, важно не только то, что можно просто выбрать, например, грушу и банан, но и то, как они будут распределены (размещены) между Дашей и Наташей.

Пожалуйста, внимательно прочитайте пункт № 2 методички **Основные формулы комбинаторики** и постарайтесь хорошо уяснить разницу между перестановками, сочетаниями и размещениями. В простейших случаях можно пересчитать все возможные комбинации вручную, но чаще всего это становится неподъемной задачей, именно поэтому и нужно понимать смысл формул.

Также напоминаю, что сейчас речь идёт о множестве с **различными** объектами, и если яблоко/грушу/банан заменить на 3 яблока или даже на 3 очень похожих яблока, то в контексте рассмотренной задачи они всё равно будут считаться **различными**.

Остановимся на каждом виде комбинаций подробнее:

Перестановки

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n **различных** объектов и отличающиеся только порядком их расположения. Количество всех возможных перестановок выражается формулой $P_n = n!$

Отличительной особенностью перестановок является то, что в каждой из них участвует **ВСЁ** множество, то есть, **все** n объектов. Например, дружная семья:

Задача 1

Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

Решение: используем формулу количества перестановок:

$P_5 = 5! = 120$

Ответ: 120 способами

Невероятно, но факт. Обратите внимание, что здесь не имеет значения круглый ли стол, квадратный, или вообще все люди сели ~~встали, легли~~ на скамейку вдоль одной стены – важно лишь количество объектов и их взаимное расположение. Помимо перестановок людей, часто встречается задача о перестановках различных книг на полке, но это было бы слишком просто даже для чайника:

Задача 2

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?

Для того чтобы составить четырёхзначное число нужно задействовать **все** четыре карточки *(цифры на которых **различны!**)*, и это очень важная предпосылка для применения формулы $P_n = n!$ Очевидно, что, переставляя карточки, мы будем получать различные четырёхзначные числа, … стоп, а всё ли тут в порядке? ;-)

Хорошенько подумайте над задачей! Вообще, это характерная черта комбинаторных и вероятностных задач – в них НУЖНО ДУМАТЬ. И зачастую думать по-житейски, как, например, в разборе вступительного примера с фруктами. Нет, конечно, я не призываю тупо прорабатывать другие разделы математики, однако должен заметить, что те же **интегралы** можно **научиться решать** чисто механически.

Решение и ответ в конце урока.

Увеличиваем обороты:

Сочетания

В учебниках обычно даётся лаконичное и не очень понятное определение сочетаний, поэтому, в моих устах формулировка будет не особо рациональной, но, надеюсь, доходчивой:

Сочетаниями называют различные комбинации из m объектов, которые выбраны из множества n различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из m элементов, в которой не важен их порядок (расположение). Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$.

Задача 3

В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

Решение: прежде всего, снова обращаю внимание на то, что по логике условия, детали считаются **различными** – даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы
(в этом случае их можно, например, пронумеровать).

В задаче речь идёт о выборке из 4 деталей, в которой не имеет значения их «дальнейшая судьба» – грубо говоря, «просто выбрали 4 штуки и всё». Таким образом, у нас имеют место сочетания деталей. Считаем их количество:

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)! \cdot 4!} = \frac{15!}{11! \cdot 4!} = (*)$$

Здесь, конечно же, не нужно ворочать огромные числа $11! = 39916800, \quad 15! = 1307674368000$.
В похожей ситуации я советую использовать следующий приём: в знаменателе выбираем наибольший **факториал** (в данном случае $11!$) и сокращаем на него дробь. Для этого числитель следует представить в виде $15! = 11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$. Распишу очень подробно:

$$(*) = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{11! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{4!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{24} = 1365$$ способами можно взять 4 детали из ящика.

Ещё раз: что это значит? Это значит, что из набора 15 различных деталей можно составить *одну тысячу триста шестьдесят пять* **уникальных** сочетания 4 деталей. То есть, каждая такая комбинация из четырёх деталей будет отличаться от других комбинаций хотя бы одной деталью.

Ответ: 1365 способами

Формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$ необходимо уделить самое пристальное внимание, поскольку она является «хитом» комбинаторики. При этом полезно ПОНИМАТЬ и без всяких вычислений записывать «крайние» значения: $C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^{n-1} = n, \quad C_n^n = 1$. Применительно к разобранной задаче:

$C_{15}^0 = 1$ – единственным способом можно не выбрать ни одной детали;
$C_{15}^1 = 15$ способами можно взять 1 деталь (любую из пятнадцати);
$C_{15}^{14} = 15$ способами можно взять 14 деталей (при этом какая-то одна из 15 останется в ящике);
$C_{15}^{15} = 1$ – единственным способом можно взять все пятнадцать деталей.

Рекомендую внимательно ознакомиться с **биномом Ньютона и треугольником Паскаля**, по которому, к слову, очень удобно выполнять проверку вычислений C_n^m при небольших значениях «эн».

Задача 4

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 3 карты?

Это пример для самостоятельного решения. Чем приятны многие комбинаторные задачи, так это краткостью – главное, разобраться в сути. И суть, бывает, открывается с различных сторон. Разберём весьма поучительный пример:

Задача 4*

В шахматном турнире участвует k человек и каждый с каждым играет по одной партии. Сколько всего партий сыграно в турнире?

Поскольку я сам играю в шахматы и неоднократно принимал участие в круговых турнирах, то сразу же сориентировался по турнирной таблице размером $k \cdot k$ клеток, в которой результат каждой партии учитывается дважды и, кроме того, затушёвываются клетки «главной диагонали» *(т.к. участники не играют сами с собой)*. Исходя из проведённых рассуждений, общее количество сыгранных партий рассчитывается по формуле $n = \frac{k \cdot k - k}{2}$. Такое решение полностью корректно *(см. соответствующий файл* ***банка готовых решений****)* и на долгое время я забыл о нём по принципу «решено, да и ладно».

Однако один из посетителей сайта заметил, что на самом деле здесь можно руководствоваться самыми что ни на есть банальными сочетаниями:
$C_k^2 = \frac{k!}{(k-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)(k-1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2) \cdot 2} = \frac{(k-1)k}{2}$ различных пар можно составить из k соперников *(кто играет белыми, кто чёрными – не важно)*.

Эквивалентной является задача о рукопожатиях: в отделе работает k мужчин и каждый с каждым здоровается за руку, сколько рукопожатий они совершают? К слову, шахматисты тоже пожимают друг другу руку перед каждой партией.

Ну а вывода тут два:
– во-первых, не всё очевидное – очевидно;
– и во-вторых, не бойтесь решать задачи «нестандартно»!

Большое спасибо за ваши письма, они помогают улучшить качество учебных материалов!

Размещения

Или «продвинутые» сочетания. ***Размещениями*** называют различные комбинации из m объектов, которые выбраны из множества n различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком. Количество размещений рассчитывается по формуле $A_n^m = (n-m+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)n$

Что наша жизнь? Игра:

Задача 5

Боря, Дима и Володя сели играть в «очко». Сколькими способами им можно сдать по одной карте? *(колода содержит 36 карт)*

Решение: ситуация похожа на Задачу 4, но отличается тем, что здесь важно не только то, какие три карты будут извлечены из колоды, но и то, КАК они будут распределены между игроками. По формуле размещений:

$A_{36}^3 = 34\cdot 35\cdot 36 = 42840$ способами можно раздать 3 карты игрокам.

Есть и другая схема решения, которая, с моей точки зрения, даже понятнее:

$C_{36}^3 = \frac{36!}{33!\cdot 3!} = 7140$ способами можно извлечь 3 карты из колоды.

Теперь давайте рассмотрим, какую-нибудь одну *из семи тысяч ста сорока* комбинаций, например: король пик, 9 червей , 7 червей. Выражаясь комбинаторной терминологией, эти 3 карты можно «переставить» между Борей, Димой и Володей $P_3 = 3! = 6$ способами:

КП, 9Ч, 7Ч;
КП, 7Ч, 9Ч;
9Ч, КП, 7Ч;
9Ч, 7Ч, КП;
7Ч, КП, 9Ч;
7Ч, 9Ч, КП.

И аналогичный факт справедлив **для любого** уникального набора из трёх карт.

А таких наборов, не забываем, мы насчитали $C_{36}^3 = 7140$. Не нужно быть профессором, чтобы понять, что найденное количество сочетаний следует умножить на шесть:

$C_{36}^3 \cdot P_3 = 7140\cdot 6 = 42840$ способами можно сдать по одной карте трём игрокам.

По существу, получилась наглядная проверка **формулы** $C_n^m \cdot P_m = A_n^m$, окончательный смысл которой мы проясним в следующем параграфе.

Ответ: 42840

Возможно, у вас остался вопрос, а кто же раздавал карты? …Наверное, преподаватель =)
И чтобы никому не было обидно, в следующей задаче примет участие вся студенческая группа:

Задача 6

В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

Задача о «размещении» должностей в коллективе встречается очень часто и является самым настоящим баяном. Краткое решение и ответ в конце урока.

Правило сложения и правило умножения комбинаций

Данные правила весьма напоминают **алгебру событий**, и многие читатели уже ознакомились с пунктом № 4 справочного материала **Основные формулы комбинаторики**, где они изложены в общем виде. Постараюсь повторить принципы максимально кратко:

1) Знак «плюс» следует понимать и читать как союз **ИЛИ**. Вспоминаем демонстрационную задачу с яблоком, грушей и бананом:

$C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 3 + 3 + 1 = 7$ способами можно выбрать хотя бы один фрукт.

То есть, можно взять 1 фрукт (любой из трёх) **ИЛИ** какое-нибудь сочетание двух фруктов **ИЛИ** все три фрукта. Заметьте, что сложение комбинаций предполагает безразличие выбора *(без разницы будет ли выбран один, два или 3 фрукта)*.

Рассмотрим более основательный пример:

Задача 7

Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Решение: в данном случае подсчёт C_{23}^2 не годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей **или** двух девушек, и уже сама словесная формулировка указывает на верный путь решения:

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ способами можно выбрать 2 юношей;

$C_{13}^2 = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы – юношей **или** девушек) можно выбрать: $C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123$ способами.

Ответ: 123

Правило умножения комбинаций:

2) Знак «умножить» следует понимать и читать как союз **И**.

Рассмотрим ту же студенческую группу, которая пошла на танцы. Сколькими способами можно составить пару из юноши и девушки?

$C_{10}^1 = 10$ способами можно выбрать 1 юношу;

$C_{13}^1 = 13$ способами можно выбрать 1 девушку.

Таким образом, одного юношу **и** одну девушку можно выбрать: $C_{10}^1 \cdot C_{13}^1 = 10 \cdot 13 = 130$ способами.

Когда из каждого множества выбирается по 1 объекту, то справедлив следующий принцип подсчёта комбинаций: «**каждый** объект из одного множества может составить пару **с каждым** объектом другого множества».

То есть, Олег может пригласить на танец любую из 13 девушек, Евгений – тоже любую из тринадцати, и аналогичный выбор есть у остальных молодых людей. Итого: $10 \cdot 13 = 130$ возможных пар.

Следует отметить, что в данном примере не имеет значения «история» образования пары; однако если принять во внимание инициативу, то количество комбинаций нужно удвоить, поскольку каждая из 13 девушек тоже может пригласить на танец любого юношу. Всё зависит от условия той или иной задачи!

Похожий принцип справедлив и для более сложных комбинаций, например: сколькими способами можно выбрать двух юношей **и** двух девушек для участия в сценке КВН?

Союз **И** недвусмысленно намекает, что комбинации необходимо перемножить:

$C_{10}^2 \cdot C_{13}^2 = 45 \cdot 78 = 3510$ возможных групп артистов.

Иными словами, **каждая** пара юношей (45 уникальных пар) может выступать с **любой** парой девушек (78 уникальных пар). А если рассмотреть распределение ролей между участниками, то комбинаций будет ещё больше. …Очень хочется, но всё-таки воздержусь от продолжения, чтобы не привить вам отвращение к студенческой жизни =).

Правило умножения комбинаций распространяется и на бОльшее количество множителей:

<u>Задача 8</u>

Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

Решение: для наглядности обозначим данное число тремя звёздочками: *****

Комбинации будем считать по разрядам – *слева направо*:

В *разряд сотен* можно записать любую из $C_9^1 = 9$ цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9). Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным.

А вот в *разряд десятков* («посерединке») можно выбрать любую из 10 цифр: $C_{10}^1 = 10$.

По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры.

Итого, существует: $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2 = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

При этом произведение $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2$ расшифровывается так: «9 способами можно выбрать цифру в *разряд сотен* **и** 10 способами выбрать цифру в *разряд десятков* **и** 2 способами в *разряд единиц*»

Или ещё проще: «**каждая** из 9 цифр в *разряде сотен* комбинируется **с каждой** из 10 цифр *разряда десятков* **и с каждой** из двух цифр в *разряде единиц*».

Ответ: 180

А теперь…

Да, чуть не забыл об обещанном комментарии к задаче № 5, в которой Боре, Диме и Володе можно сдать по одной карте $C_{36}^3 \cdot P_3 = 7140 \cdot 6 = 42840$ способами. Умножение здесь имеет тот же смысл: $C_{36}^3 = 7140$ способами можно извлечь 3 карты из колоды **И в каждой** выборке переставить их $P_3 = 3! = 6$ способами.

А теперь задача для самостоятельного решения… сейчас придумаю что-нибудь поинтереснее, …пусть будет про ту же русскую версию блэкджека:

<u>Задача 9</u>

Сколько существует выигрышных комбинаций из 2 карт при игре в «очко»?

Для тех, кто не знает: выигрывает комбинация 10 + ТУЗ (11 очков) = 21 очко и, давайте будем считать выигрышной комбинацию из двух тузов.

(порядок карт в любой паре не имеет значения)

Краткое решение и ответ в конце урока.

Кстати, не надо считать пример примитивным. Блэкджек – это чуть ли не единственная игра, для которой существует математически обоснованный алгоритм, позволяющий выигрывать у казино. Желающие могут легко найти массу информации об оптимальной стратегии и тактике. Правда, такие мастера довольно быстро попадают в чёрный список всех заведений =)

Пришло время закрепить пройденный материал парой солидных задач:

<u>Задача 10</u>

У Васи дома живут 4 кота.

а) сколькими способами можно рассадить котов по углам комнаты?
б) сколькими способами можно отпустить гулять котов?
в) сколькими способами Вася может взять на руки двух котов (одного на левую, другого – на правую)?

Решаем: во-первых, вновь следует обратить внимание на то, что в задаче речь идёт о **разных** объектах (даже если коты – однояйцовые близнецы). Это очень важное условие!

а) ~~Молчание котов~~. Данной экзекуции подвергаются **сразу все коты** + важно их расположение, поэтому здесь имеют место перестановки: $P_4 = 4! = 24$ способами можно рассадить котов по углам комнаты.

Повторюсь, что при перестановках имеет значение лишь количество различных объектов и их взаимное расположение. В зависимости от настроения Вася может рассаживать животных полукругом на диване, в ряд на подоконнике и т.д. – перестановок во всех случаях будет 24. Желающие могут для удобства представить, что коты разноцветные (например, белый, чёрный, рыжий и полосатый) и перечислить все возможные комбинации.

б) Сколькими способами можно отпустить гулять котов?

Предполагается, что коты ходят гулять только через дверь, при этом вопрос подразумевает безразличие по поводу количества животных – на прогулку могут выйти 1, 2, 3 или все 4 кота.

Считаем все возможные комбинации:

$C_4^1 = 4$ способами можно отпустить гулять одного кота (любого из четырёх);
$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ способами можно отпустить гулять двух котов (варианты перечислите самостоятельно);
$C_4^3 = 4$ способами можно отпустить гулять трёх котов (какой-то один из четырёх сидит дома);
$C_4^4 = 1$ способом можно выпустить всех котов.

Наверное, вы догадались, что полученные значения следует просуммировать:
$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ способами можно отпустить гулять котов.

Энтузиастам предлагаю усложнённую версию задачи – когда любой кот в любой выборке случайным образом может выйти на улицу, как через дверь, так и через окно ~~10 этажа~~. Комбинаций заметно прибавится!

в) Сколькими способами Вася может взять на руки двух котов?

Ситуация предполагает не только выбор 2 животных, но и их размещение по рукам:
$A_4^2 = 3 \cdot 4 = 12$ способами можно взять на руки 2 котов.

Второй вариант решения: $C_4^2 = 6$ способами можно выбрать двух котов **и** $P_2 = 2! = 2$ способами посадить **каждую** пару на руки: $C_4^2 \cdot P_2 = 6 \cdot 2 = 12$

Ответ: а) 24, б) 15, в) 12

Ну и для очистки совести что-нибудь поконкретнее на умножение комбинаций…. Пусть у Васи дополнительно живёт 5 кошек =) Сколькими способами можно отпустить гулять 2 котов **и** 1 кошку?

$C_4^2 \cdot C_5^1 = 6 \cdot 5 = 30$

То есть, с **каждой** парой котов можно выпустить **каждую** кошку.

Ещё один баян для самостоятельного решения:

<u>Задача 11</u>

В лифт 12-этажного дома сели 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со 2-го) этаже. Сколькими способами:

1) пассажиры могут выйти на одном и том же этаже *(порядок выхода не имеет значения)*;
2) два человека могут выйти на одном этаже, а третий – на другом;
3) люди могут выйти на разных этажах;
4) пассажиры могут выйти из лифта?

И тут часто переспрашивают, уточняю: если 2 или 3 человека выходят на одном этаже, то очерёдность выхода не имеет значения. ДУМАЙТЕ, используйте формулы и правила сложения/умножения комбинаций. В случае затруднений пассажирам полезно дать имена и порассуждать, в каких комбинациях они могут выйти из лифта. Не нужно огорчаться, если что-то не получится, так, например, пункт № 2 достаточно коварен, впрочем, один из читателей отыскал простое решение, и я в очередной раз выражаю благодарность за ваши письма!

Полное решение с подробными комментариями в конце урока.

Заключительный параграф посвящён комбинациям, которые тоже встречаются достаточно часто – по моей субъективной оценке, примерно в 20-30% комбинаторных задач:

Перестановки, сочетания и размещения с повторениями

Перечисленные виды комбинаций законспектированы в пункте № 5 справочного материала **Основные формулы комбинаторики**, однако некоторые из них по первому прочтению могут быть не очень понятными. В этом случае сначала целесообразно ознакомиться с практическими примерами, и только потом осмысливать общую формулировку. Поехали:

Перестановки с повторениями

В перестановках с повторениями, как и в «обычных» перестановках, участвует **сразу всё множество объектов**, но есть одно но: в данном множестве один или бОльшее количество элементов (объектов) повторяются. Встречайте очередной стандарт:

Задача 12

Сколько различных буквосочетаний можно получить перестановкой карточек со следующими буквами: К, О, Л, О, К, О, Л, Ь, Ч, И, К?

Решение: в том случае, если бы все буквы были различны, то следовало бы применить тривиальную формулу P_n, однако совершенно понятно, что для предложенного набора карточек некоторые манипуляции будут срабатывать «вхолостую», так, например, если поменять местами любые две карточки с буквами «К» в любом слове, то получится то же самое слово. Причём, физически карточки могут сильно отличаться: одна быть круглой с напечатанной буквой «К», другая – квадратной с нарисованной буквой «К». Но по смыслу задачи даже такие карточки **считаются одинаковыми**, поскольку в условии спрашивается о буквосочетаниях.

Всё предельно просто – всего: 11 карточек, среди которых буква:

К – повторяется 3 раза;
О – повторяется 3 раза;
Л – повторяется 2 раза;
Ь – повторяется 1 раз;
Ч – повторяется 1 раз;
И – повторяется 1 раз.

Проверка: 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 11, что и требовалось проверить.

По формуле **количества перестановок с повторениями**:

$$P_{11(\text{поэт})} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot\ldots\cdot n_k!} = \frac{11!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{39916800}{6\cdot 6\cdot 2} = 554400$$

различных буквосочетаний можно получить. Больше полумиллиона!

Для быстрого расчёта большого факториального значения удобно использовать стандартную функцию Экселя: забиваем в любую ячейку *=ФАКТР(11)* и жмём *Enter*.

На практике вполне допустимо не записывать общую формулу и, кроме того, опускать единичные факториалы:

$$P_{11(\text{поэт})} = \frac{11!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{39916800}{6\cdot 6\cdot 2} = 554400$$

Но предварительные комментарии о повторяющихся буквах обязательны!

Ответ: 554400

Другой типовой пример перестановок с повторениями встречается в задаче о расстановке шахматных фигур, которую можно найти на складе **готовых решений** в соответствующей pdf-ке. А для самостоятельного решения я придумал менее шаблонное задание:

Задача 13

Алексей занимается спортом, причём 4 дня в неделю – лёгкой атлетикой, 2 дня – силовыми упражнениями и 1 день отдыхает. Сколькими способами он может составить себе расписание занятий на неделю?

Формула $P_7 = 7!$ здесь не годится, поскольку учитывает совпадающие перестановки (например, когда меняются местами силовые упражнения в среду с силовыми упражнениями в четверг). И опять – по факту те же 2 силовые тренировки могут сильно отличаться друг от друга, но по контексту задачи (с точки зрения расписания) они считаются одинаковыми элементами.

Двухстрочное решение и ответ в конце урока.

Сочетания с повторениями

Характерная особенность этого вида комбинаций состоит в том, что выборка проводится из нескольких групп, каждая из которых состоит из одинаковых объектов.

Сегодня все хорошо потрудились, поэтому настало время подкрепиться:

Задача 14

В студенческой столовой продают сосиски в тесте, ватрушки и пончики. Сколькими способами можно приобрести пять пирожков?

Решение: сразу обратите внимание на типичный критерий сочетаний с повторениями – по условию на выбор предложено не множество объектов как таковое, а **различные виды** объектов; при этом предполагается, что в продаже есть не менее пяти хот-догов, 5 ватрушек и 5 пончиков. Пирожки в каждой группе, разумеется, отличаются – ибо абсолютно идентичные пончики можно смоделировать разве что на компьютере =) Однако физические характеристики пирожков по смыслу задачи не существенны, и хот-доги / ватрушки / пончики в своих группах считаются одинаковыми.

Что может быть в выборке? Прежде всего, следует отметить, что в выборке обязательно будут одинаковые пирожки (т.к. выбираем 5 штук, а на выбор предложено 3 вида). Варианты тут на любой вкус: 5 хот-догов, 5 ватрушек, 5 пончиков, 3 хот-дога + 2 ватрушки, 1 хот-дог + 2 + ватрушки + 2 пончика и т.д.

Как и при «обычных» сочетаниях, порядок выбора и размещение пирожков в выборке не имеет значения – просто выбрали 5 штук и всё.

Используем формулу $C^m_{n(повт)} = C^m_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\cdot m!}$ количества сочетаний с повторениями:

$C^5_{3(повт)} = C^5_{3+5-1} = C^5_7 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7}{2!} = 21$ способом можно приобрести 5 пирожков.

Приятного аппетита!

Ответ: 21

Какой вывод можно сделать из многих комбинаторных задач?

Порой, самое трудное – это разобраться в условии.

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Задача 15

В кошельке находится достаточно большое количество 1-, 2-, 5- и 10-рублёвых монет. Сколькими способами можно извлечь три монеты из кошелька?

В целях самоконтроля ответьте на пару простых вопросов:

1) Могут ли в выборке все монеты быть разными?
2) Назовите самую «дешевую» и самую «дорогую» комбинацию монет.

Решение и ответы в конце урока.

Из моего личного опыта, могу сказать, что сочетания с повторениями – наиболее редкий гость на практике, чего не скажешь о следующем виде комбинаций:

Размещения с повторениями

Из множества, состоящего из n элементов, выбирается m элементов, при этом важен порядок элементов в каждой выборке. И всё бы было ничего, но довольно неожиданный прикол заключается в том, что любой объект исходного множества мы можем выбирать сколько угодно раз. Образно говоря, от «множества не убудет».

Когда так бывает? Типовым примером является кодовый замок с несколькими дисками, но по причине развития технологий актуальнее рассмотреть его цифрового потомка:

Задача 16

Сколько существует четырёхзначных пин-кодов?

Решение: на самом деле для разруливания задачи достаточно знаний правил комбинаторики: $C^1_{10} = 10$ способами можно выбрать первую цифру пин-кода **и** $C^1_{10} = 10$ способами – вторую цифру пин-кода **и** столькими же способами – третью **и** столькими же – четвёртую. Таким образом, по правилу умножения комбинаций, четырёхзначный пин-код можно составить: $C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ способами.

А теперь с помощью формулы. По условию нам предложен набор из $n = 10$ цифр, из которого выбираются $m = 4$ цифры и располагаются в определенном порядке, при этом цифры в выборке могут повторяться *(т.е. любой цифрой исходного набора можно пользоваться произвольное количество раз)*. По формуле $A_{n(повт)}^m = n^m$ количества размещений с повторениями: $A_{10(повт)}^4 = 10^4 = 10000$

Ответ: 10000

Что тут приходит на ум… …если банкомат «съедает» карточку после третьей неудачной попытки ввода пин-кода, то шансы подобрать его наугад весьма призрачны.

И кто сказал, что в комбинаторике нет никакого практического смысла? Познавательная задача для всех читателей mathprofi.ru:

Задача 17

Согласно государственному стандарту, автомобильный номерной знак состоит из 3 цифр и 3 букв. При этом недопустим номер с тремя нулями, а буквы выбираются из набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х *(используются только те буквы кириллицы, написание которых совпадает с латинскими буквами)*.

Сколько различных номерных знаков можно составить для региона?

Не так их, кстати, и много. В крупных регионах такого количества не хватает, и поэтому для них существуют по несколько кодов к надписи RUS.

Решение и ответ в конце урока. Не забываем использовать правила комбинаторики ;-) …Хотел похвастаться эксклюзивом, да оказалось не эксклюзивом =) Заглянул в Википедию – там есть расчёты, правда, без комментариев. Хотя в учебных целях, наверное, мало кто прорешивал.

Наше увлекательное занятие подошло к концу, и напоследок я хочу сказать, что вы не зря потратили время – по той причине, что формулы комбинаторики находят ещё одно насущное практическое применение: они встречаются в различных задачах по **теории вероятностей**,
и в **задачах на классическое определение вероятности** – особенно часто =)

Всем спасибо за активное участие и до скорых встреч!