

Рассмотреть и законспектировать материал.

Комбинаторика

http://new.math.msu.su/departament/dm/data/uploads/dm_articles/comb_analysis.pdf

<https://ru.wikipedia.org/>

Комбинаторика — это область математики, прежде всего связанная с подсчетом, как средство и цель получения результатов, так и с определением свойств конечных структур. Она тесно связана со многими другими областями математики - алгеброй, геометрией, теорией вероятностей и применяется в различных областях знаний (например, в [генетике](#), [информатике](#), [статистической физике](#)).

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход [Лейбницем](#), который в **1666 году** опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Полный охват комбинаторики не является общепризнанным. Согласно [Х. Дж. Райзеру](#), определение предмета трудно, потому что она пересекает много математических разделов. Поскольку область может быть описана типами задач, которые она решает, комбинаторика связана с:

- *перечислением* (подсчет) определенных структур, иногда упоминаемых аранжировками или конфигурациями в самом общем смысле, связанными с конечными системами;
- *существованием* таких структур, которые удовлетворяют определенным заданным критериям;
- построением таких структур возможно несколькими способами и,
- *оптимизацией*, поиск "наилучшей" структуры или решения из нескольких возможных, будь то "наибольшая", "наименьшая" или удовлетворяющая какому-либо другому *критерию оптимальности*

[Леон Мирский](#) сказал: "комбинаторика - это ряд взаимосвязанных исследований, которые имеют что-то общее и все же сильно расходятся в своих целях, методах и степени согласованности, которую они достигли. Одним из способов определения комбинаторики является, возможно, описание её разделов с их проблемами и методами. Именно такой подход используется ниже. Однако, существуют также чисто исторические причины включения или исключения некоторых тем в комбинаторику. Хотя в первую очередь речь идет о конечных системах, в некоторых комбинаторных вопросах и методах система может быть расширена до бесконечности (в частности, [по счету](#)), но [дискретно](#) установлена.

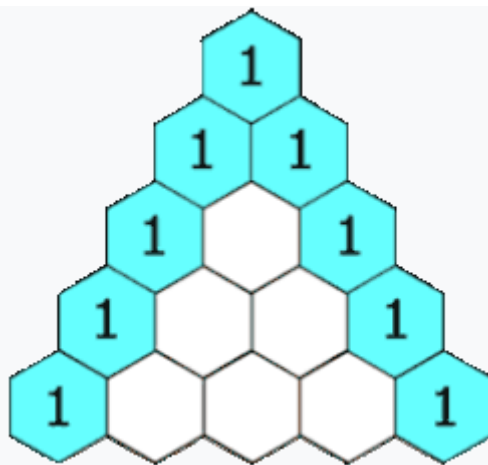
Комбинаторика хорошо известна широким охватом задач, которые она решает. Комбинаторные задачи возникают во многих областях [фундаментальной математики](#), особенно в [алгебре](#), [теории вероятностей](#), [топологии](#) и [геометрии](#), а также во многих областях ее приложений. Многие комбинаторные вопросы исторически рассматривались изолированно, давая специальное решение возникающей задачи в некотором математическом контексте. Однако, в конце XX века были разработаны мощные и общетеоретические методы, сделавшие комбинаторику самостоятельным разделом математики. Одной из старейших и наиболее изученной частью комбинаторики является [теория графов](#), которая сама по себе имеет многочисленные естественные связи с другими областями. Комбинаторика часто используется в информатике для получения формул и оценок при [анализе алгоритмов](#).

Математик, изучающий комбинаторику, называется комбинаториком.

История

Основные комбинаторные понятия и перечислительные результаты появились в [древнем мире](#). В VI веке до нашей эры [древнеиндийский врач Сушрута](#) утверждает в "[Сушрута-самхите](#)", что 63 комбинации могут быть составлены из 6 различных вкусов, взятых по

одному, по два и т. д., таким образом вычисляя $2^6 - 1$ всех возможных вариантов. Древнегреческий историк Плутарх обсуждает спор между Хрисиппом (III век до н. э.) и Гиппархом (II век до н. э.) относительно довольно деликатной проблемы перечисления, которая была продемонстрирована позже и связана с числами Шрёдера–Гиппарха. В Стомахione Архимед (III век до н. э.) рассматривает мозаичные головоломки.



Треугольник Паскаля

В Средние века комбинаторика продолжала изучаться, в основном за пределами европейской цивилизации. Индийский математик Махавира (около 850 г.) представил формулы для числа перестановок и комбинаций, и эти формулы, возможно, были знакомы индийским математикам еще в VI веке н. э. Философ и астроном Рабби Авраам ибн Эзра (ок. 1140) установил симметрию биномиальных коэффициентов, а замкнутая формула была получена позже талмудистом и математиком Леви Бен Гершом (более известным как Герсонид) в 1321 году. Блез Паскаль много занимался биномиальными коэффициентами и открыл простой способ их вычисления: «треугольник Паскаля». Хотя этот способ был уже известен на Востоке (примерно с X века) и он назывался арифметическим треугольником. Паскаль, в отличие от предшественников, строго изложил и доказал свойства этого треугольника. Арифметический треугольник представляет собой графическую диаграмму, показывающую отношения между биномиальными коэффициентами. Позже, в средневековой Англии, кампанология предоставила примеры того, что теперь известно как Гамильтоновы циклы в графах Кэли на перестановках.

В эпоху Возрождения, наряду с остальной математикой и науками, комбинаторика пережила возрождение. Джероламо Кардано написал математическое исследование игры в кости, опубликованное посмертно. Теорией этой игры занимались также Тарталья и Галилей. В историю зарождавшейся теории вероятностей вошла переписка заядлого игрока Шевалье де Мерэ с Пьером Ферма и Блезом Паскалем, где были затронуты несколько тонких комбинаторных вопросов. Помимо азартных игр, комбинаторные методы использовались (и продолжают использоваться) в криптографии — как для разработки шифров, так и для их взлома.

Наряду с Лейбницем, он считается основоположником современной комбинаторики. Сам термин «комбинаторика» придумал Лейбниц, который в 1666 году (ему было тогда 20 лет) опубликовал книгу «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Правда, термин «комбинаторика» Лейбниц понимал чрезмерно широко, включая в него всю конечную математику и даже логику^[1]. Ученик Лейбница Якоб Бернулли, один из основателей теории вероятностей, изложил в своей книге «Искусство предположений» (1713) множество сведений по комбинаторике.

В этот же период формируется терминология новой науки. Термин «сочетание» (*combination*) впервые встречается у Паскаля (1653, опубликован в 1665 году). Термин «перестановка» (*permutation*) употребил в указанной книге Якоб Бернулли (хотя эпизодически он встречался и раньше). Бернулли использовал и термин «размещение» (*arrangement*).

После появления математического анализа обнаружилась тесная связь комбинаторных и ряда аналитических задач. Абрахам де Муавр и Джеймс Стирлинг нашли формулы для аппроксимации факториала.^[2]

Окончательно комбинаторика как самостоятельный раздел математики оформилась в трудах [Эйлера](#). Он детально рассмотрел, например, следующие проблемы:

- задача о ходе коня;
- задача о семи мостах, с которой началась теория графов;
- построение греко-латинских квадратов;
- обобщённые перестановки.

Кроме перестановок и сочетаний, Эйлер изучал разбиения, а также сочетания и размещения с условиями. Их работы (Паскаля, Ньютона, Якоба Бернулли и Эйлера) стали фундаментальными в развивающейся этой области. В наше время работы Дж. Дж. Сильвестра (конец XIX века) и Перси Макмэхона (начало XX века) помогли заложить основы перечислительной и алгебраической комбинаторики. Теория графов также пользовалась большим интересом в это время, особенно в связи с теоремой о четырех красках.

Во второй половине XX века комбинаторика пережила бурный рост, что привело к созданию десятков новых журналов и конференций по данной тематике. Частично этот рост был стимулирован новыми связями и приложениями в других областях, начиная от алгебры и заканчивая вероятностью, от **функционального анализа** до **теории чисел** и т. д. Эти связи стирают границы между комбинаторикой и частями математики, и теоретической информатикой, но в то же время приводят к частичной фрагментации этой области.

Примеры комбинаторных конфигураций и задач

Для формулировки и решения комбинаторных задач используют различные модели **комбинаторных конфигураций**. Примерами комбинаторных конфигураций являются:

- **Размещением** из n элементов по k называется **упорядоченный набор** из k различных элементов некоторого n -элементного множества.
- **Перестановкой** из n элементов (например чисел $1, 2, \dots, n$) называется всякий упорядоченный набор из этих элементов. Перестановка также является размещением из n элементов по n .
- **Сочетанием** из n по k называется набор k элементов, выбранных из данных n элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений.
- **Композицией числа n** называется всякое представление n в виде упорядоченной суммы целых положительных чисел.
- **Разбиением числа n** называется всякое представление n в виде неупорядоченной суммы целых положительных чисел.

Примеры комбинаторных задач:

- Сколькими способами можно разместить n предметов по m ящикам, чтобы выполнялись заданные ограничения?
- Сколько существует функций из m -элементного множества в n -элементное, удовлетворяющих заданным ограничениям?
- Сколько существует различных перестановок из 52 игральных карт?
Ответ: $52!$ (52 факториал), то есть, 80 658 175 170 943 880 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 или примерно $8,0658 \cdot 10^{67}$.
- При игре в кости бросаются две кости, и выпавшие очки складываются; сколько существует комбинаций, в которых сумма очков на верхних гранях равна двенадцати?

Решение: Каждый возможный исход соответствует функции (аргумент функции — это номер кости, значение — очки на верхней грани). Очевидно, что лишь 6

+ 6 даёт нам нужный результат 12. Таким образом, существует лишь одна функция, ставящая в соответствие 1 число 6, и 2 число 6. Или, другими словами, существует всего одна комбинация, при которой сумма очков на верхних гранях равна двенадцати.

Методы и разделы комбинаторики

Перечислительная комбинаторика

Основная статья: [Перечислительная комбинаторика](#)



Пять двоичных деревьев с тремя вершинами, пример чисел Каталана

Перечислительная комбинаторика (или **исчисляющая комбинаторика**) рассматривает задачи о *перечислении* или *подсчёте количества* различных конфигураций (например, [перестановок](#)) образуемых элементами конечных множеств, на которые могут накладываться определённые ограничения, такие как: различимость или неразличимость элементов, возможность повторения одинаковых элементов и т. п.

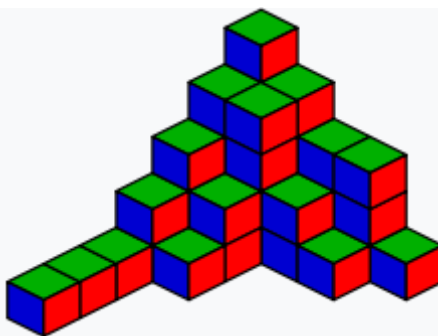
Количество конфигураций, образованных несколькими манипуляциями над множеством, подсчитывается согласно правилам [сложения](#) и [умножения](#).

[Числа Фибоначчи](#) являются типичным примером задачи в перечислительной комбинаторике, а также известная [Задача о письмах](#). [Двенадцатеричный путь](#) обеспечивает единую структуру для подсчета [перестановок](#), [сочетаний](#) и [разбиений](#).

Аналитическая комбинаторика

Основная статья: [Аналитическая комбинаторика](#)^[en]

Аналитическая комбинаторика относится к перечислению комбинаторных структур с использованием инструментов из [комплексного анализа](#) и [теории вероятности](#). В отличие от перечислительной комбинаторики, которая использует явные комбинаторные формулы и [производящие функции последовательности](#) для описания результатов, аналитическая комбинаторика нацелена на получение [асимптотических формул](#).

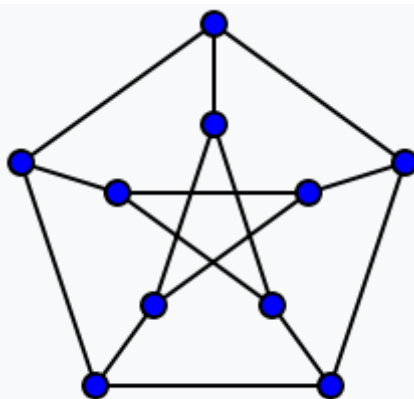


Плоское разбиение

Теория разбиения

Основная статья: [Разбиение числа](#)

Теория разбиения изучает различные перечислительные и асимптотические задачи, связанные с [разбиением натуральных чисел](#) и тесно связана с [q-рядами](#), [специальными функциями](#) и [ортогональными многочленами](#). Первоначально она была частью [теории чисел](#) и [анализа](#), а теперь рассматривается как часть комбинаторики или самостоятельная область. Она включает в себя [биективный подход](#) и различные инструменты анализа, и [аналитической теории чисел](#) и имеет связи со [статистической механикой](#).



Граф Петерсена

Теория графов

Основная статья: [Теория графов](#)

Графы являются фундаментальными объектами в комбинаторике. Теория графов рассматривает перечисления (например, число n вершин с k ребрами графа), существующие структуры (например, гамильтоновы циклы), алгебраические представления (например, возьмем граф G и два числа x и y , имеет ли [Многочлен Татта](#) $T_G(x, y)$ комбинаторное представление?). Хотя между теорией графов и комбинаторикой существуют очень сильные связи, они иногда рассматриваются как отдельные предметы. То же время комбинаторные методы применимы ко многим задачам теории графов, эти две дисциплины обычно используются для поиска решений различных типов задач.

Теория схем

Основная статья: [Комбинаторная схема](#)

Теория схем — это исследование [комбинаторных схем](#), которые представляют собой наборы подмножеств с определенными свойствами [пересечения](#). [Блок схемы](#) — это комбинаторные схемы особого типа. Эта область является одной из старейших частей комбинаторики, например, предложенная в 1850 году [задача Киркмана о школьницах](#). Решение задачи является частным случаем [системы Штейнера](#), системы которой играют важную роль в [классификации простых конечных групп](#). Эта область имеет дальнейшие связи с [теорией кодирования](#) и геометрической комбинаторикой.

Конечная геометрия

Основная статья: [Конечная геометрия](#)

Конечная геометрия — это изучение [геометрических систем](#), имеющих только конечное число точек. Структуры аналогичны тем, которые встречаются в непрерывной геометрии ([плоскость Евклидова](#), [реальное проективное пространство](#) и т. д.), но определены комбинаторно основные изучаемые элементы. Эта область предоставляет богатый источник примеров для [теории схем](#). Её не следует путать с дискретной геометрией ([комбинаторной геометрией](#)).

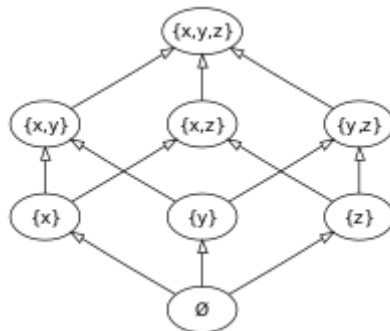


Диаграмма Хассе, булеан — $\{x, y, z\}$ упорядоченный по включению

Теория порядка

Основная статья: [Отношение порядка](#)

Теория порядка — это изучение [частично упорядоченных множеств](#), как конечных, так и бесконечных. Различные примеры частичных порядков встречаются в [алгебре](#), геометрии, теории чисел и во всей комбинаторике, и теории графов. Известные классы и примеры частичных порядков включают [решетки](#) и [булевы алгебры](#).

Теория матроидов

Основная статья: [Матроид](#)

Теория матроидов абстрагирует часть [геометрии](#). Она изучает свойства множеств (обычно конечных множеств) векторов в векторном пространстве, которые не зависят от конкретных коэффициентов в [линейно зависимом](#) отношении. Не только структура, но и перечислительные свойства принадлежат теории матроидов. Теория матроидов была введена [Хасслером Уитни](#) и изучалась как часть теории порядка. В настоящее время это самостоятельная область исследований, имеющая ряд связей с другими разделами комбинаторики.

Экстремальная комбинаторика

Основная статья: [Экстремальная комбинаторика](#)^[en]

Экстремальная комбинаторика изучает экстремальные вопросы о [системах множеств](#). Типы вопросов, рассматриваемых в этом случае, относятся к самому большому возможному графу, который удовлетворяет определенным свойствам. Например, самый большой [граф без треугольников](#) на $2n$ вершинах — это [полный двудольный граф](#) $K_{n,n}$. Часто бывает слишком трудно даже точно найти экстремальный ответ $f(n)$ и можно дать только [асимптотическую оценку](#).

Теория Рамсея

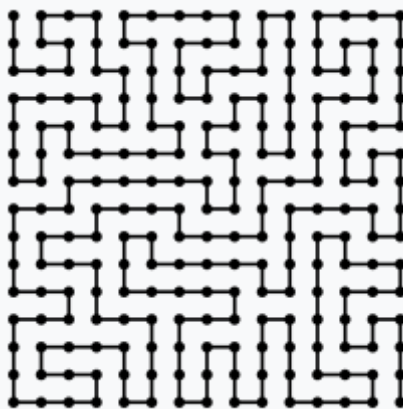
Основная статья: [Теория Рамсея](#)

Теория Рамсея — это еще одна часть экстремальной комбинаторики. Она утверждает, что любая достаточно большая конфигурация будет содержать некоторый порядок и изучает наличие регулярных структур в случайных конфигурациях элементов. Это расширенное обобщение принципа Дирихле («принцип голубей и ящиков»). Примером утверждения из теории Рамсея может служить следующее:

в группе из 6 человек всегда можно найти трёх человек, которые либо попарно знакомы друг с другом, либо попарно незнакомы.

В терминах структурной комбинаторики это же утверждение формулируется так:

в любом графе с 6 вершинами найдётся либо [клика](#), либо независимое множество размера 3.



Самоустраняющаяся прогулка по решетке

Вероятностная комбинаторика

Основная статья: [Вероятностный метод](#)

Этот раздел отвечает на вопросы вида: какова вероятность присутствия определённого свойства для случайного дискретного объекта, такого как [случайный граф](#)? Например, каково среднее число треугольников в случайном графе? Вероятностные методы также используются для определения существования комбинаторных объектов с определёнными заданными свойствами (для которых явные примеры может быть трудно найти), просто наблюдая, что вероятность случайного выбора объекта с этими свойствами больше 0. Этот подход (часто называемый [вероятностным методом](#)) доказал свою высокую эффективность в приложениях экстремальной комбинаторики и теории графов. Тесно связанной областью является изучение конечных [цепей Маркова](#), особенно на комбинаторных объектах. Здесь снова используются вероятностные инструменты для оценки [времени смешивания](#).

Часто ассоциируемая с [Палом Эрдёшем](#), который сделал новаторскую работу по этому предмету, вероятностная комбинаторика традиционно рассматривалась как набор инструментов для изучения задач в других частях комбинаторики. Однако с ростом приложений для [анализа алгоритмов](#) в [информатике](#), а также классической теории вероятностей, [аддитивной теории чисел](#) и [вероятностной теории чисел](#), эта область в последнее время выросла и стала самостоятельной областью комбинаторики.

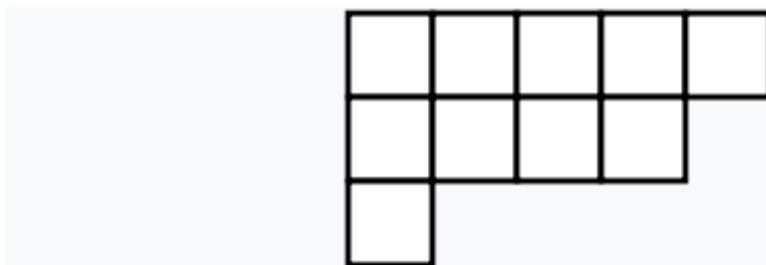


Диаграмма Юнга формы (5, 4, 1)

Алгебраическая комбинаторика

Основная статья: [Алгебраическая комбинаторика](#)

Алгебраическая комбинаторика — это область [математики](#), которая использует методы [абстрактной алгебры](#), в частности [теорию групп](#) и [теорию представлений](#), в различных комбинаторных контекстах и, наоборот, применяет комбинаторные методы к задачам [алгебры](#). Алгебраическая комбинаторика постоянно расширяет свой охват, как в тематических направлениях, так и в методах и может рассматриваться как область математики, где взаимодействие комбинаторных и алгебраических методов особенно сильно и существенно.

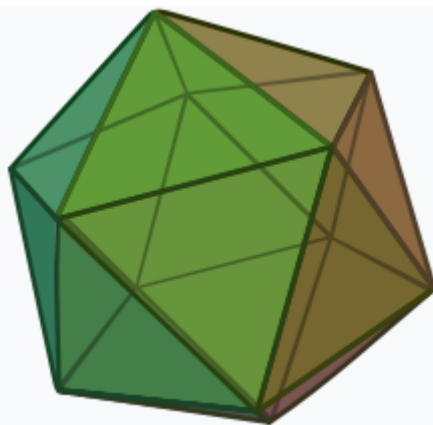


Демонстрация создания последовательности Морса — Туэ.

Комбинаторика слов

Основная статья: [Комбинаторика слов](#)^[en]

Комбинаторика слов имеет дело с [формальными языками](#). Она возникла самостоятельно в нескольких областях математики, в том числе в [теории чисел](#), [теории групп](#) и [теории вероятности](#). Она имеет приложения в перечислительной комбинаторике, [фрактальном анализе](#), [теоретической информатике](#), [теории автоматов](#) и лингвистике. Хотя многие приложения являются новыми, классическая [иерархия Хомского](#) классов [формальных грамматик](#) является, пожалуй, самым известным результатом в этой области.

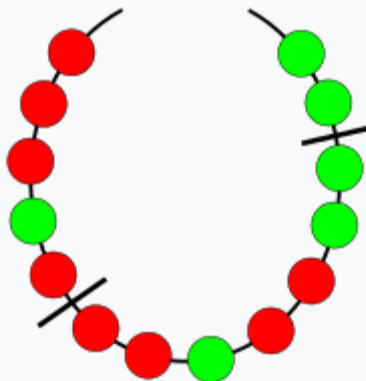


Выпуклый [правильный икосаэдр](#)

Комбинаторная геометрия

Основная статья: [Комбинаторная геометрия](#)

Геометрическая комбинаторика связана с [выпуклой](#) и [дискретной геометрией](#), в частности с [комбинаторикой многогранников](#). Например, она спрашивает, сколько граней каждого измерения может иметь [выпуклый многогранник](#). Важную роль играют также [метрические](#) свойства многогранников, например, [теорема Коши](#) о жесткости выпуклых многогранников. Рассматриваются также особые многогранники, такие как [перестановочные многогранники](#), [ассоциаэдры](#) и [многогранники Биркгофа](#). [Комбинаторная геометрия](#) — это старомодное название дискретной геометрии.



Пример ожерелья, разделённого на $k = 2$ (то есть между двумя участниками дележа) и $t = 2$ (то есть два типа бусин, имеется 8 красных и 6 зелёных). Показаны 2 разреза — один из участников получает большую секцию, а другой получает оставшиеся два куска.

Топологическая комбинаторика

Основная статья: [Топологическая комбинаторика](#)

[Топологическая комбинаторика](#) применяет идеи и методы комбинаторики в [топологии](#), при изучении [раскрасок графа](#), [справедливого делёжа](#), [разбиения](#), [дерева принятия решений](#), [частично упорядоченных множеств](#), [задач “ожерелья”](#) и [дискретной теории Морсе](#). Её не следует путать с [комбинаторной топологией](#), которая является более старым названием [алгебраической топологии](#).

Арифметическая комбинаторика

Основная статья: [Арифметическая комбинаторика](#)

Арифметическая комбинаторика возникла из взаимодействия между [теорией чисел](#), комбинаторикой, [эргодической теорией](#) и [гармоническим анализом](#). Она о комбинаторных оценках, связанных с арифметическими операциями (сложение,

вычитание, умножение и деление). [Аддитивная теория чисел](#) (иногда также называемая аддитивной комбинаторикой) относится к частному случаю, когда задействованы только операции сложения и вычитания. Одним из важных методов арифметической комбинаторики является [эргодическая теория динамических систем](#).

Инфинитарная комбинаторика

Основная статья: [Инфинитарная комбинаторика](#)^[en]

Инфинитарная комбинаторика (англ.) — применение идей и методов комбинаторики к [бесконечным](#) (в том числе, [несчётным](#)) множествам. Это часть [теории множеств](#), область [математической логики](#), но использует инструменты и идеи как теории множеств, так и экстремальной комбинаторики.

[Джан-Карло Рота](#) использовал название непрерывной комбинаторики для описания [геометрической вероятности](#), поскольку существует много аналогий между подсчетом и мерой.

Комбинаторный анализ,

комбинаторная математика, комбинаторика, отдел математики, в котором изучаются вопросы, связанные с размещением и взаимным расположением частей конечного множества объектов произвольной природы (а также бесконечных множеств, удовлетворяющих некоторым условиям конечности).

Идеи комбинаторного характера имеют самое широкое распространение в математике, в таких её разделах, как теория вероятностей, теория чисел, алгебра и др. Задачи К. а. известны уже с глубокой древности. В развитие К. а. большой вклад внесли многие математики. Однако в самостоятельную научную дисциплину К. а. стал оформляться лишь в 20 в.

К. а. тесно связан с теорией графов, теорией конечных автоматов и другими отраслями математики. Его результаты применяются при планировании и анализе научных экспериментов, кодировании сообщений, в линейном и динамическом программировании, в математической экономике и многих других областях науки и техники. Различают три типа проблем К. а. Задачи на перечисление. В задачах такого типа интересуются количеством возможных размещений, удовлетворяющих различным условиям, конечного множества объектов. Одним из типичных примеров такого рода задач является задача о размещении каких-либо n частиц в N ячейках; как частицы, так и ячейки могут быть различимыми и неразличимыми, и это обуславливает различные ответы на поставленную задачу. Для решения разнообразных перечислительных задач, встречающихся на практике, разработаны мощные методы; среди них основные — метод производящих функций и метод перечисления Пойа.

Задачи о существовании и построении. В задачах такого рода интересуются, существует ли конфигурация частей конечного множества, обладающая некоторыми заданными свойствами, и если да, то как её построить. Например, существует ли такая система подмножеств (блоков) данного конечного множества, что любые два различных элемента множества встречаются вместе в этих блоках заданное число раз. Такие системы называют блок-схемами. Они и

им подобные конфигурации интенсивно изучаются в К. а. При этом большую роль играют теоретико-числовые и алгебраические методы.

Задачи о выборе. В задачах этого типа исследуются условия, при которых можно осуществить такой выбор подмножества или некоторой совокупности частей множества, чтобы удовлетворялись некоторые требования, носящие чаще всего оптимальный характер. Например, пусть дано множество и имеется некоторая система подмножеств; при каких условиях можно выбрать по одному элементу в каждом подмножестве так, чтобы все эти элементы были попарно различны? Это — задача о системе различных представителей для системы подмножеств. При решении задач о выборе, наряду с чисто комбинаторными соображениями, также существенно применяется алгебраический аппарат.

Лит.: Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; Раизер Г. Дж. Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966.

В. Е. Тараканов.

Целью курса «Методы комбинаторного анализа» является обучение студентов навыкам исследования теоретических проблем комбинаторного анализа, технике решения задач комбинаторного характера и применению его в криптологии.

Этот курс предлагается как общий курс для студентов специальности «Компьютерная безопасность» и других родственных специальностей. Введение

Предмет теории комбинаторного анализа.

Основные понятия и определения.

Области применения изучаемой дисциплины.

Примеры прикладных задач.

Комбинаторные схемы и объекты Комбинаторные отношения.Выборки и упорядочения. Разбиения. Множества. Отображения, соответствия, функции, операции, алгебры. Числа, многочлены, операторы. Преобразования.Булевы функции. Цикловое строение. Комбинаторные тождества.

Метод производящих функции Формальные степенные ряды.

Производящие функции: свойства и операции. Специальные числа и специальные функции. Метод дифференциальных уравнений. Метод линейных функционалов. Асимптотические разложения. Числа Каталана. Экспоненциальные производящие функции.

Логические методы Метод включения и исключения.

Системы представителей множеств. Теорема и числа Рамсея. Неравенство Бонферрони.

Формулы обращения для частично упорядоченных множеств. Беспорядки. Число булевых функций, существенно зависящих от всех своих переменных. Функции Эйлера и Мебиуса.

Комбинаторные таблицы и схемы Специальные матрицы.

Латинские прямоугольники и квадраты. Системы троек Штейнера и сходные наборы. Блок-схемы. Проблема Вандер-Вардена.

Геометрические методы Графы.

Деревья. Циклы подстановок. Графы преобразований. Блоки. Конечные плоскости. Общая комбинаторная схема и теория Пойа Группы и эквивалентность отображений.

Общая комбинаторная схема.

Несимметричные n -базисы. Симметричные n -базисы. Теорема Пойа.

Вероятностные методы в комбинаторном анализе

Вероятностные распределения и случайные величины. Моменты случайных величин. Неотрицательные целочисленные матрицы. Покрытия множеств. Производящие функции и предельные теоремы. Разбиения конечных множеств. Конечные топологии. Разделяющие системы множеств. Случайные подстановки. Случайные размещения. Обобщенная схема размещений. Случайные графы. Гигантские компоненты. Случайное блуждание на прямой и связанные с ним задачи. Производящие функции дискретных распределений и их свойства. Производящие функции моментов. Вероятностные методы решения комбинаторных задач. Методы 1-х и 2-х моментов. Случайные комбинаторные объекты. Получение асимптотических оценок в комбинаторных задачах с помощью вероятностных методов. Перманенты и трансверсали Свойства перманентов.

Перманенты и трансверсали.

Неразложимые и вполне разложимые матрицы. Оценки перманента. Стохастические матрицы. Теорема Биркгофа.

Асимптотические методы

Оценки интервалов по методу Лапласа. Время ожидания коллизии. Комплексный анализ. Формула Коши. Метод перевала. Формула Стирлинга.

Литература. 1. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения./ Под. ред. Рыбникова К.А.. 1982г. 2. В.Н. Сачков. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. 1982г. 3. С.К. Ландо. Лекции о производящих функциях. 2002г.