http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html

Графики и основные свойства элементарных функций

Данный методический материал носит справочный характер и относится к широкому кругу тем. В статье приведен обзор графиков основных элементарных **функций** и рассмотрен важнейший вопрос – **как правильно и БЫСТРО построить график**. В ходе изучения высшей математики без знания графиков основных элементарных функций придётся тяжело, поэтому очень важно вспомнить, как выглядят графики параболы, гиперболы, синуса, косинуса и т.д., запомнить некоторые значения функций. Также речь пойдет о некоторых свойствах основных **функций**.

Я не претендую на полноту и научную основательность материалов, упор будет сделан, прежде всего, на практике – тех вещах, с которыми **приходится сталкиваться буквально на каждом шагу, в любой теме высшей математики**. Графики для чайников? Можно сказать и так.

По многочисленным просьбам читателей **кликабельное оглавление**:

Возрастание, убывание и экстремумы функции

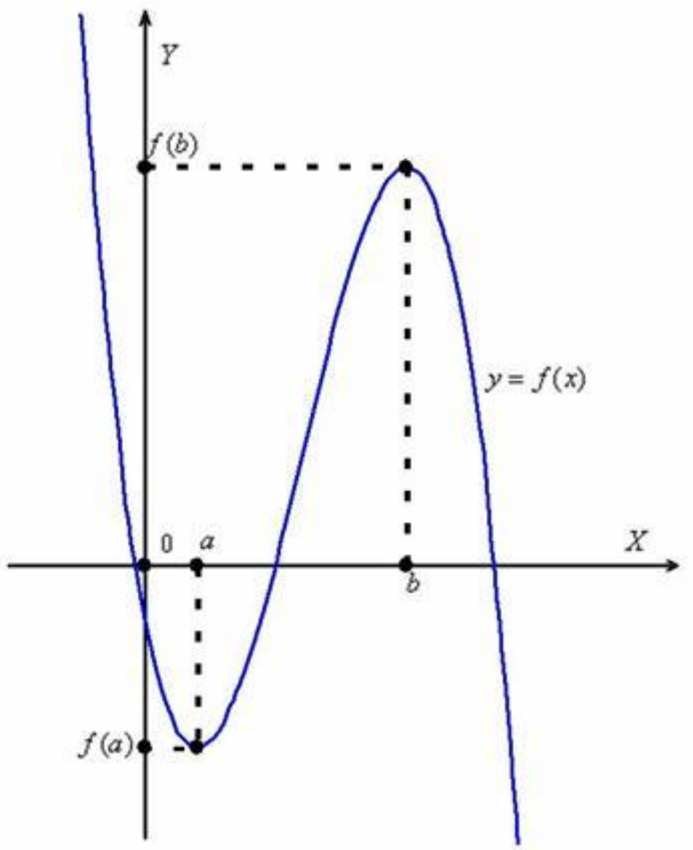
Нахождение интервалов возрастания, убывания и экстремумов функции является как самостоятельной задачей, так и важнейшей частью других заданий, в частности, **полного исследования функции**. Начальные сведения о возрастании, убывании и экстремумах функции даны в **теоретической главе о производной**, которую я настоятельно рекомендую к предварительному изучению *(либо повторению)* – ещё и по той причине, что нижеследующий материал базируется на самой *сути производной,* являясь гармоничным продолжением указанной статьи. Хотя, если времени в обрез, то возможна и чисто формальная отработка примеров сегодняшнего урока.

А сегодня в воздухе витает дух редкого единодушия, и я прямо чувствую, что все присутствующие горят желанием **научиться исследовать функцию с помощью производной**. Поэтому на экранах ваших мониторов незамедлительно появляется разумная добрая вечная терминология.

Зачем? Одна из причин самая что ни на есть практическая: **чтобы было понятно, что от вас вообще требуется в той или иной задаче**!

Монотонность функции. Точки экстремума и экстремумы функции

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$. Упрощённо полагаем, что она непрерывна на всей числовой прямой:



На всякий случай сразу избавимся от возможных иллюзий, особенно это касается тех читателей, кто недавно ознакомился с интервалами знакопостоянства функции. Сейчас нас **НЕ ИНТЕРЕСУЕТ**, как расположен график функции относительно оси OX (выше, ниже, где пересекает ось). Для убедительности мысленно сотрите оси и оставьте один график. Потому что интерес именно в нём.

Функция **возрастает** на интервале, если для любых двух точек этого интервала, связанных отношением $x_2 > x_1$, справедливо неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. То есть, бОльшему значению аргумента соответствует бОльшее значение функции, и её график идёт «снизу вверх». Демонстрационная функция $y = f(x)$ растёт на интервале $(a; b)$.

Аналогично, функция **убывает** на интервале, если для любых двух точек данного интервала, таких, что $x_2 > x_1$, справедливо неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. То есть, бОльшему значению аргумента соответствует мЕньшее значение функции, и её график идёт «сверху вниз». Наша функция $y = f(x)$ убывает на интервалах $(-\infty; a), (b; +\infty)$.

Если функция возрастает или убывает на интервале, то её называют **строго монотонной** на данном интервале. Что такое монотонность? Понимайте в буквальном смысле – однообразие.

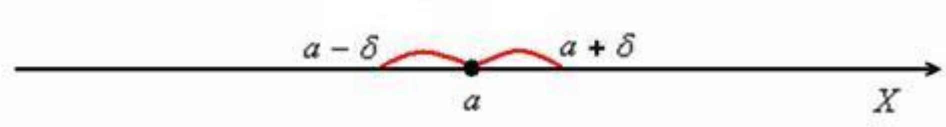
Также можно определить **неубывающую** функцию (смягчённое условие $f(x_2) \geq f(x_1)$ в первом определении) и **невозрастающую** функцию (смягчённое условие $f(x_2) \leq f(x_1)$ во 2-м определении). Неубывающую или невозрастающую функцию на интервале называют монотонной функцией на данном интервале *(строгая монотонность – частный случай «просто» монотонности)*.

Теория рассматривает и другие подходы к определению возрастания/убывания функции, в том числе на полуинтервалах, отрезках, но чтобы не выливать на вашу голову масло-масло-масляное, договоримся оперировать открытыми интервалами с категоричными определениями – это чётче, и для решения многих практических задач вполне достаточно.

Таким образом, **в моих статьях за формулировкой «монотонность функции» почти всегда будут скрываться интервалы строгой монотонности** (строгого возрастания или строгого убывания функции).

Окрестность точки. Слова, после которых студенты разбегаются, кто куда может, и в ужасе прячутся по углам. …Хотя после поста **Пределы по Коши** уже, наверное, не прячутся, а лишь слегка вздрагивают =) Не беспокойтесь, сейчас не будет доказательств теорем математического анализа – окрестности мне потребовались, чтобы строже сформулировать определения *точек экстремума*. Вспоминаем:

Окрестностью точки называют интервал, который содержит данную точку, при этом для удобства интервал часто полагают симметричным. Например, точка $x = a$ и её стандартная δ - окрестность:



Собственно, определения:

Точка x_0 называется **точкой строгого максимума**, если *существует* её δ - окрестность, **для всех** значений x которой за исключением самой точки x_0 выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$. В нашем конкретном примере это точка b.

Точка x_0 называется **точкой строгого минимума**, если *существует* её δ - окрестность, **для всех** значений x которой за исключением самой точки x_0 выполнено неравенство $f(x) > f(x_0)$. На чертеже – точка «а».

Примечание*: требование симметричности окрестности вовсе не обязательно. Кроме того, важен* ***сам факт существования*** *окрестности (хоть малюсенькой, хоть микроскопической), удовлетворяющей указанным условиям*

Точки a, b называют **точками строго экстремума** или просто **точками экстремума** функции. То есть это обобщенный термин точек максимума и точек минимума.

Как понимать слово «экстремум»? Да так же непосредственно, как и монотонность. Экстремальные точки американских горок.

Как и в случае с монотонностью, в теории имеют место и даже больше распространены нестрогие постулаты *(под которые, естественно, подпадают рассмотренные строгие случаи!)*:

Точка x_0 называется **точкой максимума**, если *существует* её окрестность, такая, что **для всех** значений x данной окрестности выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Точка x_0 называется **точкой минимума**, если *существует* её окрестность, такая, что **для всех** значений x данной окрестности выполнено неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

Заметьте, что согласно последним двум определениям, любая точка функции-константы (либо «ровного участка» какой-нибудь функции) считается как точкой максимума, так и точкой минимума! Функция $f(x) = C$, к слову, одновременно является и невозрастающей и неубывающей, то есть монотонной. Однако оставим сии рассуждения теоретикам, поскольку на практике мы почти всегда созерцаем традиционные «холмы» и «впадины» (см. чертёж) с уникальным «царём горы» $f(b)$ или «принцессой болота» $f(a)$. Как разновидность, встречается *остриё*, направленное вверх либо вниз, например, минимум функции $y = |x|$ в точке $x = 0$.

Да, кстати, о королевских особах:
– значение $f(b)$ называют **максимумом** функции;
– значение $f(a)$ называют **минимумом** функции.

Общее название – **экстремумы** функции.

Пожалуйста, будьте аккуратны в словах!

Точки экстремума – это «иксовые» значения.
Экстремумы – «игрековые» значения.

! Примечание*: иногда перечисленными терминами называют точки «икс-игрек», лежащие непосредственно на САМОМ ГРАФИКЕ функции.*

Сколько может быть экстремумов у функции?

Ни одного, 1, 2, 3, … и т.д. до бесконечности. Например, у синуса бесконечно много минимумов и максимумов.

ВАЖНО! Термин «максимум функции» **не тождественен** термину «максимальное значение функции». Легко заметить, что значение $f(b)$ максимально лишь в локальной окрестности, а слева вверху есть и «покруче товарищи». Аналогично, «минимум функции» – не то же самое, что «минимальное значение функции», и на чертеже мы видим, что значение $f(a)$ минимально только на определённом участке. В этой связи точки экстремума также называют *точками локального экстремума*, а экстремумы – *локальными экстремумами*. Ходят-бродят неподалёку и *глобальные* собратья. Так, любая парабола имеет в своей вершине *глобальный минимум* или *глобальный максимум*. Далее я не буду различать типы экстремумов, и пояснение озвучено больше в общеобразовательных целях – добавочные прилагательные «локальный»/«глобальный» не должны заставать врасплох.

Чайникам на первых порах рекомендую создать и осмыслить небольшой терминологический конспект, чтобы не путать Иран с Ираком.

Подытожим наш небольшой экскурс в теорию контрольным выстрелом: что подразумевает задание «найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции»?

Формулировка побуждает найти:

– интервалы возрастания/убывания функции (намного реже фигурирует неубывание, невозрастание);

– точки максимума и/или точки минимума (если таковые существуют). Ну и от незачёта подальше лучше найти сами минимумы/максимумы ;-)

Как всё это определить? С помощью производной функции!

Как найти интервалы возрастания, убывания, точки экстремума и экстремумы функции?

Многие правила, по сути, уже известны и понятны из **урока о смысле производной**.

Рассмотрим **дифференцируемую** на некотором интервале функцию $y = f(x)$. Тогда:

– если производная $f'(x) > 0$ на интервале, то функция $f(x)$ возрастает на данном интервале;

– если производная $f'(x) < 0$ на интервале, то функция $f(x)$ убывает на данном интервале.

Примечание*: справедливы и обратные утверждения.*

Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $y = f(x)$. Данная точка называется **критической**, если в ней производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$ либо значения $f'(x_0)$ не существует. Критическая точка может быть точкой экстремума. А может и не быть. Очень скоро мы рассмотрим необходимые и достаточные условия существования экстремума.

Но сначала ~~потренируемся на кошках~~ разделаемся с простейшими примерами. Почин положен в конце **теоретической статьи о производной**, и на очереди другие жертвы анализа. Заодно есть возможность провести маленькое самотестирование – насколько хорошо вы запомнили, как выглядят **графики жизненно важных функций**? В тяжелом случае, конечно же, следует открыть первый урок на соседней вкладке и щёлкать туда-сюда по мере комментариев.

Производная кубической функции $f(x) = x^3$ неотрицательна: $f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \geq 0$ для любого «икс».
Действительно, кубическая парабола идёт «снизу вверх». *Бесконечно близко* около точки $x = 0$ *скорость изменения* функции равна нулю, о чём в

рупор кричит производная: $f'(0)=3\cdot 0^2=0$. И вот вам, кстати, сразу пример, когда в критической точке нет максимума или минимума функции.

Функция $f(x)=\sqrt{x}$ обитает на промежутке $[0;+\infty)$, а её производная неравенством $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$ однозначно показывает, что «корень из икс» строго растёт на интервале $(0;+\infty)$ В критической точке $x=0$ функция **определена**, но не дифференцируема.
С геометрических позиций тут нет **общей касательной**. Однако в теории рассматриваются так называемые *односторонние производные*, и в указанной точке существует *правосторонняя производная* с *правосторонней касательной*. Желающие разобраться в этом подробнее могут покурить первый том матана.

***Примечание**: согласно информации первого параграфа, точка $x=0$ не является точкой минимума функции $f(x)=\sqrt{x}$ (хотя «по понятиям» это вроде бы так). Дело в том, что определения точек максимума и минимума предполагают существование функции*
***и слева и справа** от данных точек. Так же не считаются точками экстремума крайние значения области определения арксинуса и арккосинуса (см. ниже).*

Стандартная гипербола $f(x)=\frac{1}{x}$ идёт «сверху вниз», то есть данная функция убывает на всей **области определения**. Что и показывает её производная:
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ для любого «икс» кроме нуля.
Здесь, к слову, точка $x=0$ вообще не считается критической, так как функция $f(x)=\frac{1}{x}$ банально в ней не определена.

Экспоненциальная функция $f(x)=e^x$ растёт на всей числовой прямой (для любого значения «икс» справедливо строгое неравенство $f'(x)=e^x>0$).
Исследуя же производную $f'(x)=(e^{-x})'=-e^{-x}<0$, легко сделать вывод, что функция $f(x)=e^{-x}$ наоборот – убывает на $\Re$.

Что делает натуральный логарифм $f(x)=\ln x$ ~~сегодня вечером~~?
Растёт:
$f'(x)=\frac{1}{x}>0$ на интервале $(0;+\infty)$.

Начертите/распечатайте на соседних либо одном чертеже (иль просто представьте в уме) графики функции $f(x)=\sin x$ и её производной $f'(x)=\cos x$.
Там, где график косинуса находится над осью OX, синус растёт. Обратно – где график $f'(x)=\cos x$ расположен ниже оси абсцисс, синус убывает. А в тех точках, где косинус пересекает ось ($f'(x)=0$), синусоида $f(x)=\sin x$ достигает минимума или максимума.

Аналогичная история с косинусом $f(x)=\cos x$ и его производной $f'(x)=-\sin x$ (второй кадр запечатлён в статье **Геометрические преобразования графиков**).

Производная тангенса $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ несёт бодрую весть о том, что функция $f(x) = tgx$ возрастает на всей **области определения**.

С котангенсом и его производной $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ ситуация ровно противоположная.

Арксинус на интервале $(-1; 1)$ растёт – производная здесь положительна: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$.
При $x = -1, x = 1$ функция $f(x) = \arcsin x$ определена, но не дифференцируема. Однако в критической точке $x = -1$ существует правосторонняя производная и правосторонняя касательная, а на другом краю – их левосторонние визави.

Думаю, вам не составит особого труда провести похожие рассуждения для арккосинуса и его производной.

Все перечисленные случаи, многие из которых представляют собой **табличные производные**, напоминаю, следуют непосредственно из **определения производной**.

Зачем исследовать функцию с помощью производной?

Чтобы лучше узнать, как выглядит график этой функции: где он идёт «снизу вверх», где «сверху вниз», где достигает минимумов максимумов (если вообще достигает). Не все функции такие простые – в большинстве случаев у нас вообще нет ни малейшего представления о графике той или иной функции.

Настала пора перейти к более содержательным примерам и рассмотреть **алгоритм нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции**:

Пример 1

Найти интервалы возрастания/убывания и экстремумы функции

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$$

Решение:

1) На первом шаге нужно найти **область определения функции**, а также взять на заметку **точки разрыва** (если они существуют). В данном случае функция непрерывна на всей числовой прямой, и данное действие в известной степени формально. Но в ряде случаев здесь разгораются нешуточные страсти, поэтому отнесёмся к абзацу без пренебрежения.

2) Второй пункт алгоритма обусловлен

необходимым условием экстремума:

Если в точке x_0 есть экстремум, то $f'(x_0) = 0$ либо значения $f'(x_0)$ не существует.

Смущает концовка? Экстремум функции «модуль икс».

Условие необходимо, но **не достаточно**, и обратное утверждение справедливо далеко не всегда. Так, из равенства $f'(x_0) = 0$ ещё не следует, что функция достигает максимума или минимума в точке x_0. Классический пример уже засветился выше – это кубическая парабола $f(x)=x^3$ и её критическая точка $x=0$.

Но как бы там ни было, необходимое условие экстремума диктует надобность в отыскании подозрительных точек. Для этого следует найти производную и решить уравнение $f'(x)=0$:

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x-1\right)'=-\frac{1}{3}\cdot 3x^2+3\cdot 2x-5-0=-x^2+6x-5$$

Получилось обычное **квадратное уравнение**:

$$f'(x)=-x^2+6x-5=0$$
$$D=36-20=16>0$$

Положительный дискриминант доставляет две критические точки:

$$\sqrt{D}=\sqrt{16}=4$$
$$x=\frac{-6+4}{-2}=1$$
$$x=\frac{-6-4}{-2}=5$$

Примечание: *корни можно традиционно обозначить через* x_1, x_2, *однако в ходе* ***полного исследования функции*** *удобнее обойтись без подстрочных индексов, так как они вносят лишние оговорки и путаницу*

Итак, $x=1, x=5$ – критические точки

Но экстремумов в них может и не оказаться, поэтому нужно продолжить решение.

3) Нас выручит

первое достаточное условие экстремума,

которое вкратце формулируется следующим образом: пусть функция дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0. Тогда:

– если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «плюса» на «минус», то в данной точке функция достигает максимума;

– если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то в данной точке функция достигает минимума.

Тут всё очень и очень наглядно, представьте – функция росла-росла-росла, и после прохождения некоторого рубежа вдруг стала убывать. Максимум. Во втором случае график шёл-шёл-шёл «сверху вниз», а при переходе через точку x_0 развернулся в противоположную сторону. Минимум.

Исходя из вышесказанного, вытекает логичное решение: **на числовой прямой нужно отложить точки разрыва функции, критические точки и определить знаки производной на интервалах, которые входят в область определения функции**.

В рассматриваемом примере с непрерывностью на $\Re$ всё тип-топ, поэтому работаем только с найдёнными критическими точками.

Напрашивается *метод интервалов*, который уже применялся для определения **интервалов знакопостоянства функции**. Так почему бы его не использовать для производной? Ведь производная тоже простая смертная функция, найдёшь её – и делай всё, что хочешь.

Внимание! Сейчас мы работаем с ПРОИЗВОДНОЙ, а не с самой функцией!

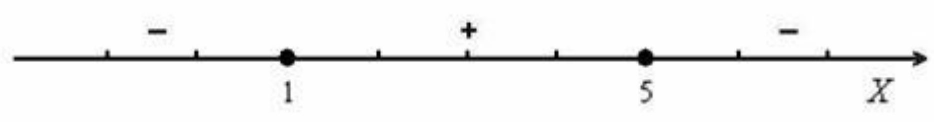
Перед нами парабола $f'(x) = -x^2 + 6x - 5$, ветви которой направлены вниз, и многим читателям уже понятны знаки производной, но ради повторения снова пройдёмся по всем этапам **метода интервалов**. Отложим на числовой прямой найденные критические точки:

I) Берём какую-нибудь точку интервала $(-\infty; 1)$ и находим значение производной в данной точке. Удобнее всего выбрать $x = 0$:
$f'(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$, значит, производная отрицательна на всём интервале $(-\infty; 1)$.

II) Выбираем точку $x = 2$, принадлежащую интервалу $(1; 5)$, и проводим аналогичное действие:
$f'(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 - 5 = -4 + 12 - 5 = 3 > 0$, следовательно, $f'(x) > 0$ на всём интервале $(1; 5)$.

III) Вычислим значение производной в наиболее удобной точке $x = 6$ последнего интервала:
$f'(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 - 5 = -36 + 36 - 5 = -5 < 0$, поэтому $f'(x) < 0$ в любой точке интервала $(5; +\infty)$.

В результате получены следующие знаки производной:



Время собирать урожай!

На интервалах $(-\infty; 1)$, $(5; +\infty)$ производная отрицательна, значит, САМА ФУНКЦИЯ $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ на данных интервалах **убывает**, и её график идёт «сверху вниз». На среднем интервале $f'(x) > 0$, значит, функция **возрастает** на $(1; 5)$, и её график идёт «снизу вверх».

При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с «–» на «+», следовательно, в этой точке функция достигает **минимума**:

$$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 1 = -\frac{1}{3} + 3 - 5 - 1 = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$$

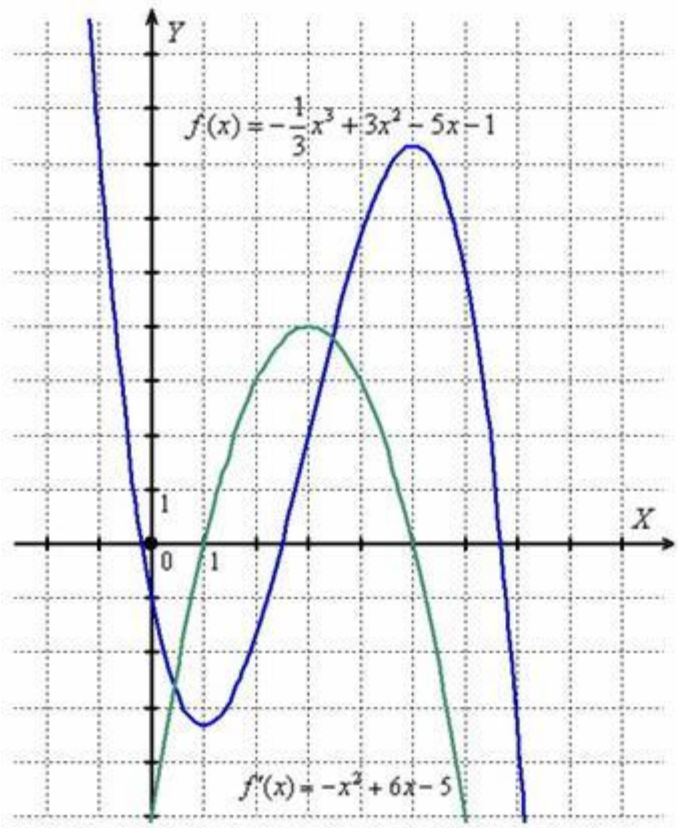
При переходе же через точку $x = 5$ производная меняет знак с «+» на «–», и функция достигает **максимума** в данной точке:

$$f(5) = -\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 - 1 = -\frac{125}{3} + 75 - 25 - 1 = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

Ответ: функции возрастает на интервале $(1;5)$ и убывает на интервалах $(-\infty;1),\ (5;+\infty)$. В точке $x=1$ функция достигает минимума: $f(1)=-3\frac{1}{3}$, а в точке $x=5$ – максимума: $f(5)=7\frac{1}{3}$

Остерегайтесь сокращенной записи $\min f(x)=f(1)=-3\frac{1}{3},\quad \max f(x)=f(5)=7\frac{1}{3}$. Под значками $\min,\ \max$ обычно понимают минимальное и максимальное значение, а это, как пояснялось выше, далеко не то же самое, что минимум и максимум.

Пример так тщательно провёрнут через мясорубку, что грех не привести графическое изображение всех событий. Незнакомец теоретической части статьи снимает шляпу:



Что произошло? На первом этапе мы нашли производную $f'(x)=-x^2+6x-5$ и критические точки $x=1,\ x=5$ (в которых парабола пересекает ось абсцисс). Затем методом интервалов было установлено, где $f'(x)<0$ (парабола ниже оси) и $f'(x)>0$ (парабола выше оси). Таким образом, с помощью производной мы узнали интервалы возрастания/убывания и экстремумы «синей» функции.

Помимо 1-го достаточного условия экстремума существует и **2-е достаточное условие**, однако для **исследования функций** оно малоинформативно и больше используется в **экстремальных задачах**.

В начале первой статьи **о графиках функции** я рассказывал, как быстро построить параболу на примере $f(x)=-x^2+2x$: «…берём первую производную и приравниваем ее к нулю: $f'(x)=(-x^2+2x)'=-2x+2=0$ …Итак, решение нашего уравнения: $x=1$ – именно в этой точке и находится вершина параболы…». Теперь, думаю, всем понятно, почему вершина параболы находится именно в этой точке =) Вообще, следовало бы начать с похожего примера и здесь, но он уж слишком прост (даже для чайника). К тому же, аналог есть в самом конце урока о **производной функции**. Поэтому повысим степень:

Пример 2

Найти промежутки монотонности и экстремумы функции

$$f(x)=8x+\frac{x^4}{4}$$

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и примерный чистовой образец оформления задачи в конце урока.

Наступил долгожданный момент встречи с дробно-рациональными функциями:

Пример 3

Исследовать функцию с помощью первой производной

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$$

Обратите внимание, как вариативно можно переформулировать фактически одно и то же задание.

Решение:

1) Функция терпит бесконечные разрывы в точках $x=-1,\ x=1$.

2) Детектируем критические точки. Найдём первую производную и приравняем её к нулю:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{(x^3)'\cdot(x^2-1)-x^3\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0$$

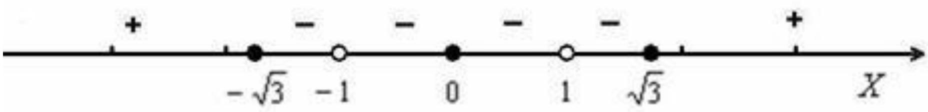
Решим уравнение $f'(x)=0$. Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю:

$$x^2(x^2-3)=0$$

Таким образом, получаем три критические точки:

$$x=-\sqrt{3},\ x=0,\ x=\sqrt{3}$$

3) Откладываем на числовой прямой ВСЕ обнаруженные точки и **методом интервалов** определяем знаки ПРОИЗВОДНОЙ:



Напоминаю, что необходимо взять какую-нибудь точку интервала, вычислить в ней значение производной $f'(x)=\frac{x^2\cdot(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ и определить её знак. Выгоднее даже не считать, а «прикинуть» устно. Возьмём, например, точку $x=-1,5$, принадлежащую интервалу $(-\sqrt{3};-1)$, и выполним подстановку: $f'(-1,5)=\frac{(-1,5)^2\cdot((-1,5)^2-3)}{((-1,5)^2-1)^2}$.

$(-1{,}5)^2 > 0$

$(-1{,}5)^2 - 3 < 0$

$((-1{,}5)^2 - 1)^2 > 0$

Два «плюса» и один «минус» дают «минус», поэтому $f'(-1{,}5) < 0$, а значит, производная отрицательна и на всём интервале $(-\sqrt{3}; -1)$.

Действие, как вы понимаете, нужно провести для каждого из шести интервалов. Кстати, обратите внимание, что множитель числителя x^2 и знаменатель $(x^2-1)^2$ строго положительны для любой точки любого интервала, что существенно облегчает задачу.

Итак, производная сообщила нам, что САМА ФУНКЦИЯ $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ возрастает на $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ и убывает на $(-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{3})$. Однотипные интервалы удобно скреплять значком объединения $\cup$.

В точке $x = -\sqrt{3}$ функция достигает максимума: $f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{3-1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}6$

В точке $x = \sqrt{3}$ функция достигает минимума: $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$

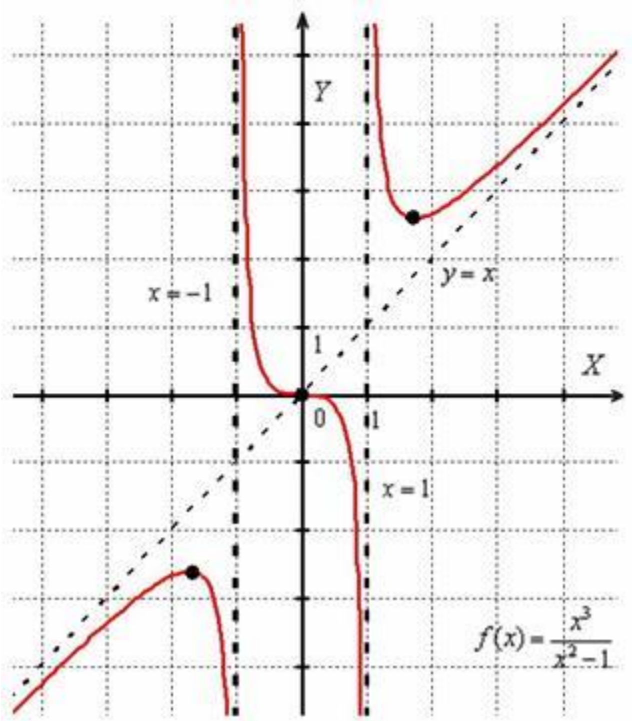
Подумайте, почему можно заново не пересчитывать второе значение ;-)

При переходе через точку $x = 0$ производная не меняет знак, поэтому у функции там НЕТ ЭКСТРЕМУМА – она как убывала, так и осталась убывающей.

! Повторим важный момент: точки $x = -1, x = 1$ не считаются критическими – в них функция **не определена**. Соответственно, здесь **экстремумов не может быть в принципе** (даже если производная меняет знак).

Ответ: функция возрастает на $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ и убывает на $(-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{3})$ В точке $x = -\sqrt{3}$ достигается максимум функции: $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, а в точке $x = \sqrt{3}$ – минимум: $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Знание интервалов монотонности и экстремумов вкупе с установленными **асимптотами** даёт уже очень хорошее представление о внешнем виде графика функции. Человек среднего уровня подготовки способен устно определить, что у графика функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ есть две вертикальные асимптоты $x = -1, x = 1$ и наклонная асимптота $y = x$. Вот наш герой:



Постарайтесь ещё раз соотнести результаты исследования с графиком данной функции.
В критической точке $x=0$ экстремума нет, но существует **перегиб графика** (что, как правило, и бывает в похожих случаях).

Пример 4

Найти экстремумы функции
$f(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}$

Пример 5

Найти интервалы монотонности, максимумы и минимумы функции
$f(x)=\frac{1-x^3}{3x}$

…прямо какой-то Праздник «икса в кубе» сегодня получается....
Тааак, кто там на галёрке предложил за это выпить? =)

В каждой задаче есть свои содержательные нюансы и технические тонкости, которые закомментированы в конце урока.

Как отмечалось, в ходе выполнения задания всегда нужно внимательно следить за **точками разрыва** и интервалами, которые не входят в **область определения функции**. Казус состоит в том, что иногда производная может существовать на таких участках! Простейший пример: производная натурального логарифма $f'(x)=\frac{1}{x}$ определена на интервале $(-\infty;0)$, но сам логарифм – нет. **Интервалы, которые не входят в область определения функции, НЕЛЬЗЯ рассматривать и у производной!**

Типичный барьерный риф:

Пример 6

Найти интервалы монотонности и экстремумы функции
$f(x)=\ln(x^2+2x-2)$

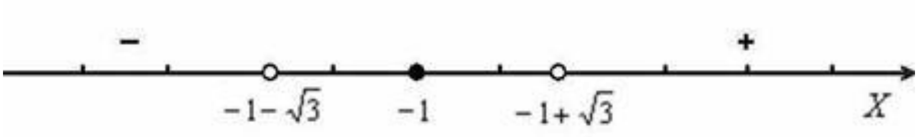
Приближаю оформление к боевым условиям и прекращаю нумерацию пунктов алгоритма.

Решение: в Примере 11 статьи об интервалах знакопостоянства была найдена область определения данной функции: $D(f)=(-\infty;-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3};+\infty)$, знание которой **КРИТИЧЕСКИ ВАЖНО** учитывать в нашей задаче:

$$f'(x)=(\ln(x^2+2x-2))'=\frac{1}{x^2+2x-2}\cdot(x^2+2x-2)'=\frac{2x+2}{x^2+2x-2}=0$$

Вроде бы всё хорошо: у нас есть корень $x=-1$ и крайние точки области определения: $x=-1-\sqrt{3},\ x=-1+\sqrt{3}$.

Но производная проявила своеволие – она в отличие от своего родителя определена и на интервале $(-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3})$. Более того, точка $x=-1$ *(не критическая!!! ;))* вошла в этот нехороший интервал! Что делать? Мама всегда права, поэтому определяем знаки производной **только на интервалах области определения функции**:



Функция убывает на интервале $(-\infty;-1-\sqrt{3})$ и возрастает на интервале $(-1+\sqrt{3};+\infty)$. Точки экстремума (и, понятно, экстремумы) ОТСУТСТВУЮТ. Значение $x=-1$ осталось не при делах, так как на интервале $(-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3})$ попросту нет графика функции $f(x)=\ln(x^2+2x-2)$.

Ответ: функция убывает на интервале $(-\infty;-1-\sqrt{3})$ и возрастает на $(-1+\sqrt{3};+\infty)$, экстремумы отсутствуют.

Будьте очень внимательны, если вам встретится логарифм или корень – в подобных примерах просто необходимо увАжить область определения функции!

Пример 7

Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x)=x\ln x$

Это приятный разгрузочный пример для самостоятельного решения.

И заключительный пример посвящен другому приключению непослушной дочери:

Пример 8

Найти точки экстремума функции $f(x)=\sqrt[3]{3x^2-x^3}$

Решение: функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Найдём критические точки:

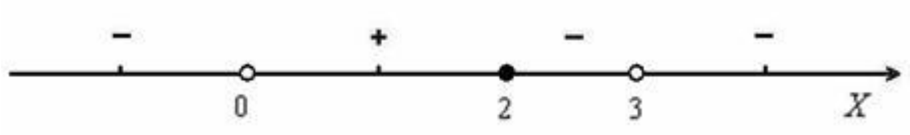
$$f'(x)=((3x^2-x^3)^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}(3x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2-x^3)'=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(3x^2-x^3)^2}}\cdot(6x-3x^2)=$$

$$=\frac{3x(2-x)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(3-x)^2}}=\frac{2-x}{\sqrt[3]{x\cdot(3-x)^2}}=0$$

На всякий случай детализирую преобразования знаменателя:
$\sqrt[3]{(3x^2-x^3)^2}=\sqrt[3]{(x^2\cdot(3-x))^2}=\sqrt[3]{x^4\cdot(3-x)^2}=\sqrt[3]{x^3\cdot x\cdot(3-x)^2}=x\cdot\sqrt[3]{x\cdot(3-x)^2}$ *, затем сокращаем числитель и знаменатель на «икс».*

Таким образом, $x=0, x=2, x=3$ – критические точки. Почему значения $x=0, x=3$, обращающие знаменатель производной в ноль, следует отнести к критическим точкам? А дело в том, что САМА-ТО ФУНКЦИЯ в них определена! Ситуация необычна, но клубок распутывается по стандартной схеме.

Определим знаки производной на полученных интервалах:



Функция возрастает на интервале $(0;2)$ и убывает на $(-\infty;0)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$.

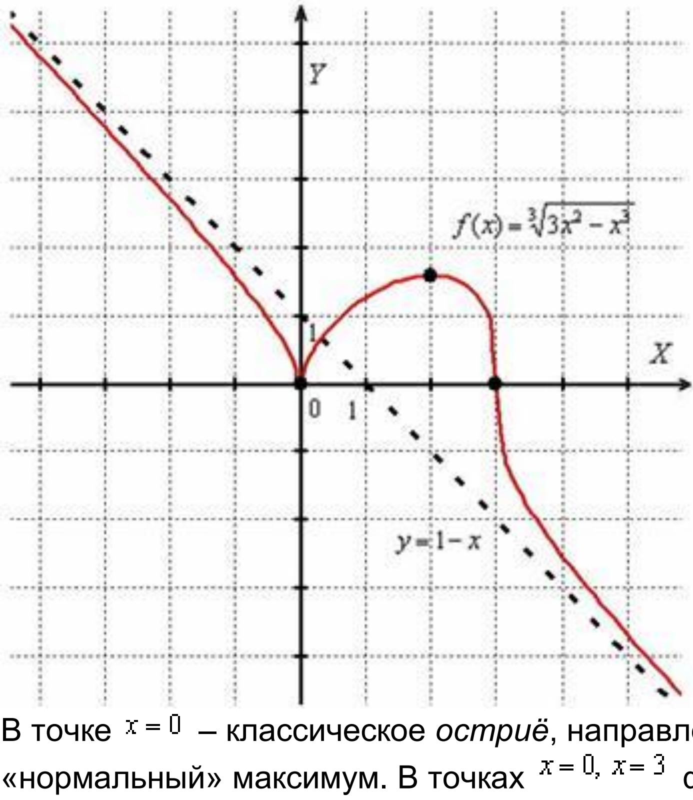
В точке $x=0$ функция достигает минимума: $f(0)=\sqrt[3]{3\cdot 0^2-0^3}=0$.

В точке $x=2$ функция достигает максимума: $f(2)=\sqrt[3]{3\cdot 2^2-2^3}=\sqrt[3]{12-8}=\sqrt[3]{4}\approx 1,6$.
В точке $x=3$ нет экстремума.

Ответ: $x=0$ – точка минимума, $x=2$ – точка максимума

По условию требовалось найти точки экстремума и что-то добавлять излишне. Но в решении как бы невзначай вычислены и сами экстремумы ;-)

Давайте посмотрим на на эту оригинальную картину:



В точке $x=0$ – классическое *остриё*, направленное вниз, при $x=2$ – «нормальный» максимум. В точках $x=0, x=3$ функция не дифференцируема, однако в них существуют бесконечные производные и вертикальные касательные (см. **теорию производной**).

...да, родители и дети бывают разными. Но мама права в 95% случаев с погрешностью $\pm 2\%$. Я проводил **статистическое исследование**.

Желаю успехов!

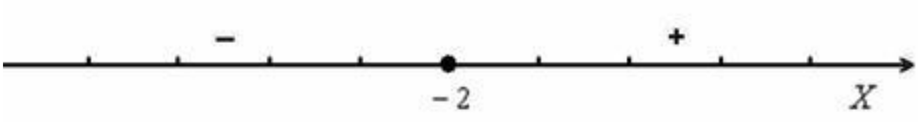
Решения и ответы:

Пример 2: ***Решение***:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.
2) Найдём критические точки:

$$f'(x)=\left(8x+\frac{x^4}{4}\right)'=8+x^3=0$$

$x=-2$ *– критическая точка.*
3) Методом интервалов определим знаки производной:



***Ответ**: функция убывает на интервале* $(-\infty;-2)$ *и возрастает на интервале* $(-2;+\infty)$. *В точке* $x=-2$ *функция достигает минимума:* $f(-2)=8\cdot(-2)+\frac{(-2)^4}{4}=-16+4=-12$

Пример 4: ***Решение***:

1) Функция терпит бесконечный разрыв в точке $x=2$.
2) Найдём критические точки:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(x^3)'\cdot(x-2)^2-x^3\cdot((x-2)^2)'}{(x-2)^4}=\frac{3x^2\cdot(x-2)^2-x^3\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=$$

$$=\frac{3x^2\cdot(x-2)-2x^3}{(x-2)^3}=\frac{3x^3-6x^2-2x^3}{(x-2)^3}=\frac{x^3-6x^2}{(x-2)^3}=\frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}=0$$

$x=0$, $x=6$ *– критические точки.*
3) Методом интервалов определим знаки производной:

В точке $x=6$ *функция достигает минимума:* $f(6)=\frac{6^3}{(6-2)^2}=\frac{216}{16}=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$.
В точке $x=0$ *экстремум отсутствует.*

***Ответ**: в точке* $x=6$ *функция достигает минимума:* $f(6)=13\frac{1}{2}$
***Примечание**: обратите внимание, что информацию об интервалах монотонности раскрывать не обязательно, так как по условию требовалось найти только экстремумы функции*

Пример 5: ***Решение***:

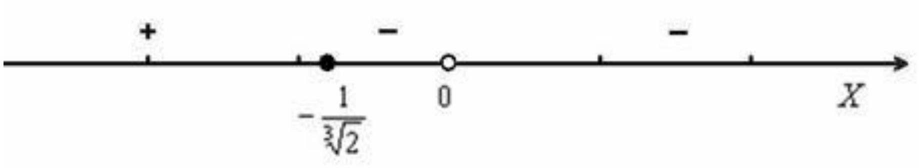
1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x=0$.

2) Найдём критические точки:

$$f'(x)=\left(\frac{1-x^3}{3x}\right)'=\left(\frac{1}{3x}-\frac{x^2}{3}\right)'=-\frac{1}{3x^2}-\frac{2x}{3}=\frac{-1-2x^3}{3x^2}=-\frac{(1+2x^3)}{3x^2}=0$$

***Примечание**: в данном случае перед дифференцированием выгодно почленно разделить числитель на знаменатель*

$x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ *– критическая точка.*
3) Определим знаки производной:



Ответ: *функция возрастает на* $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ *и убывает на* $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

В точке $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ *она достигает максимума:*

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3}{3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)} = \frac{1+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{3} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

Пример 7: ***Решение***:

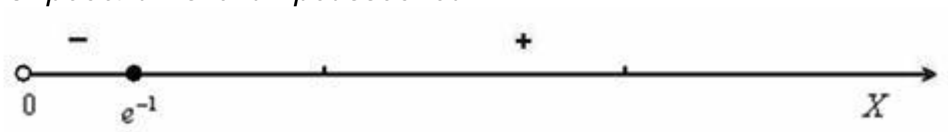
Область определения: $(0; +\infty)$.
Найдём критические точки:

$$f'(x) = (x\ln x)' = (x)'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1} \approx 0{,}37$ *– критическая точка.*
Определим знаки производной:



Ответ: *функция убывает на интервале* $(0; e^{-1})$ *и возрастает на интервале* $(e^{-1}; +\infty)$ *В точке* $x = e^{-1}$ *функция достигает минимума:* $f(e^{-1}) = e^{-1}\ln e^{-1} = e^{-1}\cdot(-1) = -e^{-1}$