http://matecos.ru/mat/matematika/issledovanie-funktsii-i-postroenie-grafika-funktsii.html

Исследование функции и построение графика функции

Для того, чтобы построить график функции необходимо провести полное исследование заданной функции. Затем поэтапно,

Как построить график функции?

После краткого описания пунктов исследования, приведем ряд примеров по теме построения графиков функции с полным п

Приведем примерный алгоритм получения необходимых данных.

1.Нахождение области определения функции

Определение интервалов, на которых функция существует.

!!! Очень подробно об области определения функций и примеры нахождения области определения **тут**.

2.Нули функции

Для вычисления нулей функции, необходимо приравнять заданную функцию к нулю и решить полученное уравнение. На графике это точки пересечения с осью OX.

3.Четность, нечетность функции

Функция четная, если y(-x) = y(x). Функция нечетная, если y(-x) = -y(x). Если функция четная – график функции симметричен относительно оси ординат (OY). Если функция нечетная – график функции симметричен относительно начала координат.

4.Промежутки знакопостоянства

Расстановка знаков на каждом из интервалов области определения. Функция положительна на интервале - график расположен выше оси абсцисс. Функция отрицательна - график ниже оси абсцисс.

5. Промежутки возрастания и убывания функции.

Для определения вычисляем первую производную, приравниваем ее к нулю. Полученные нули и точки области определения выносим на числовую прямую. Для каждого интервала определяем знак производной. Производная положительна - график функции возрастает, отрицательна - убывает.

6. Выпуклость, вогнутость.

Вычисляем вторую производную. Находим значения, в которых вторая производная равна нулю или не существует. Вторая производная положительна - график функции выпукл вверх. Отрицательна - график функции выпукл вниз.

7. Наклонные асимптоты.

http://www.cleverstudents.ru/functions/function_researching.html

Полное исследование функции и построение графика.

Стоит задача: провести полное исследование функции и построить ее график $f(x)=\frac{x^2}{4x^2-1}$.

Каждый студент прошел через подобные задачи.

Дальнейшее изложение предполагает хорошее знание свойств и графиков основных элементарных функций. Рекомендуем обращаться к этому разделу при возникновении вопросов.

Алгоритм исследования функции состоит из следующих шагов.

1. **Нахождение области определения функции.**

   Это очень важный шаг исследования функции, так как все дальнейшие действия будут проводиться на области определения.

   В нашем примере нужно найти нули знаменателя и исключить их из области действительных чисел.

   $$4x^2-1=0$$
   $$x=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow$$
   $$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$$

   (В других примерах могут быть корни, логарифмы и т.п. Напомним, что в этих случаях область определения ищется следующим образом:

   для корня четной степени, например, $\sqrt[4]{g(x)}$ - область определения находится из неравенства $g(x)\geq 0$;

   для логарифма $\log_a g(x)$ - область определения находится из неравенства $g(x)>0$).

   Перейти к подробному описанию как найти область определения функции...

2. **Исследование поведения функции на границе области определения, нахождение вертикальных асимптот.**

   На границах области определения функция имеет **вертикальные асимптоты**, если односторонние пределы функции в этих граничных точках бесконечны.

   В нашем примере граничными точками области определения являются $x=\pm\frac{1}{2}$.

   Исследуем поведение функции при приближении к этим точкам слева и справа, для чего найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{4x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{\frac{1}{4}}{(-2)\cdot(-0)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{4x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{\frac{1}{4}}{(-2)\cdot(+0)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{4x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{\frac{1}{4}}{(-0)\cdot 2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{4x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{\frac{1}{4}}{(+0)\cdot 2}=+\infty$$

   Так как односторонние пределы бесконечны, то прямые $x=\pm\frac{1}{2}$ являются вертикальными асимптотами графика.

3. **Исследование функции на четность или нечетность.**

Функция является **четной**, если $y(-x)=y(x)$. Четность функции указывает на симметрию графика относительно оси ординат.

Функция является **нечетной**, если $y(-x)=-y(x)$. Нечетность функции указывает на симметрию графика относительно начала координат.

Если же ни одно из равенств не выполняется, то перед нами функция общего вида.

В нашем примере выполняется равенство $y(-x)=y(x)$, следовательно, наша функция четная. Будем учитывать это при построении графика - он будет симметричен относительно оси *oy*.

4. **Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точек экстремума.**

   Промежутки возрастания и убывания являются решениями неравенств $f'(x)\geq 0$ и $f'(x)\leq 0$ соответственно.

   Точки, в которых производная обращается в ноль, называют **стационарными**.

   Критическими точками функции называют внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует.

   ЗАМЕЧАНИЕ (включать ли критические точки в промежутки возрастания и убывания).

   - Некоторые авторы полагают, что промежутки возрастания и убывания являются решениями неравенств $f'(x)>0$ и $f'(x)>0$. В этом случае критические точки не включаются в промежутки.
   - Некоторые авторы полагают, что точки, в которых функция определена, а конечной производной не имеет, нужно включать в промежутки возрастания и убывания (например, функция $y=\sqrt[3]{x}$ в точке *x=0* определена, а производная в этой точке бесконечна $y'=\dfrac{1}{3\cdot x^{\frac{2}{3}}},\quad y'(0)=\dfrac{1}{0}=\infty$, *x=0* следует включить в промежуток возрастания функции).
   - По нашему мнению, принципиальной важности это не имеет, хотя и может стать причиной разногласий. Чтобы избежать конфликтов, УТОЧНЯЙТЕ У СВОЕГО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ ЕГО ОТНОШЕНИЕ К ВКЛЮЧЕНИЮ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК В ПРОМЕЖУТКИ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ. А еще лучше, ссылайтесь на математическую литературу, рекомендованную министерством образования РФ.

Мы будем включать критические точки в промежутки возрастания и убывания, если они принадлежат области определения функции.

Таким образом, **чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции**

- во-первых, находим производную;
- во-вторых, находим критические точки;
- в-третьих, разбиваем область определения критическими точками на интервалы;
- в-четвертых, определяем знак производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку возрастания, знак «минус» - промежутку убывания.

Поехали!

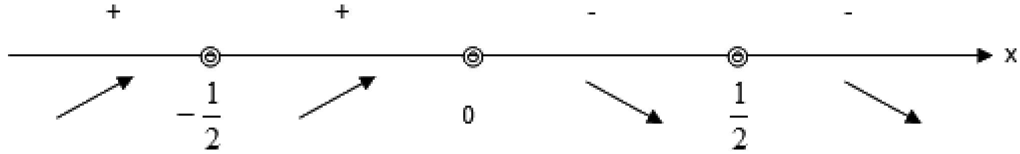
Находим производную на области определения (при возникновении сложностей, смотрите раздел дифференцирование функции, нахождение производной).

$$f'(x)=\frac{(x^2)'(4x^2-1)-x^2(4x^2-1)'}{(4x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(4x^2-1)^2}$$

Находим критические точки, для этого:

- Находим стационарные точки (они же нули числителя): в нашем примере $x=0$;
- Находим нули знаменателя: $x=\pm\frac{1}{2}$.

Наносим эти точки на числовую ось и определяем знак производной внутри каждого полученного промежутка. Как вариант, можно взять любую точку из промежутка и вычислить значение производной в этой точке. Если значение положительное, то ставим плюсик над этим промежутком и переходим к следующему, если отрицательное, то ставим минус и т.д. К примеру, $f'(-1)=\frac{-2\cdot(-1)}{(4(-1)^2-1)^2}=\frac{2}{9}>0$, следовательно, над первым слева интервалом ставим плюс.



Делаем вывод:

- функция возрастает на промежутке $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ и на промежутке $\left(-\frac{1}{2};0\right]$;
- функция убывает на промежутке $\left[0;\frac{1}{2}\right)$ и на промежутке $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Схематично плюсами / минусами отмечены промежутки где производная положительна / отрицательна. Возрастающие / убывающие стрелочки показывают направление возрастания / убывания.

Точками экстремума функции являются точки, в которых функция определена и проходя через которые производная меняет знак.

В нашем примере точкой экстремума является точка *x=0* . Значение функции в этой точке равно $f(0)=\frac{0^2}{4\cdot 0^2-1}=0$. Так как производная меняет знак с плюса на минус при прохождении через точку *x=0* , то *(0; 0)* является точкой локального максимума. (Если бы производная меняла знак с минуса на плюс, то мы имели бы точку локального минимума).

5. **Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба.**

Промежутки вогнутости и выпуклости функции находятся при решениями неравенств $f''(x)\geq 0$ и $f''(x)\leq 0$ соответственно.

Иногда вогнутость называют выпуклостью вниз, а выпуклость – выпуклостью вверх.

Здесь также справедливы замечания, подобные замечаниям из пункта про промежутки возрастания и убывания.

Таким образом, **чтобы определить промежутки вогнутости и выпуклости функции** :

- во-первых, находим вторую производную;
- во-вторых, находим нули числителя и знаменателя второй производной;
- в-третьих, разбиваем область определения полученными точками на интервалы;
- в-четвертых, определяем знак второй производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку вогнутости, знак «минус» - промежутку выпуклости.

Поехали!

Находим вторую производную на области определения.

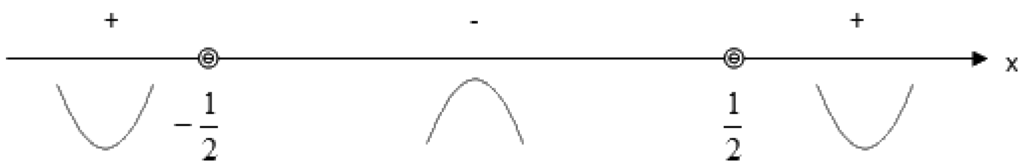
$$f''(x)=\left(\frac{-2x}{\left(4x^2-1\right)^2}\right)'=$$

$$=\frac{(-2x)'\left(4x^2-1\right)^2-(-2x)\left(\left(4x^2-1\right)^2\right)'}{\left(4x^2-1\right)^4}=\frac{24x^2+2}{\left(4x^2-1\right)^3}$$

Далее ищем нули числителя и знаменателя.

В нашем примере нулей числителя нет, нули знаменателя $x=\pm\frac{1}{2}$.

Наносим эти точки на числовую ось и определяем знак второй производной внутри каждого полученного промежутка.



Делаем вывод:

- функция выпуклая на промежутке $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;
- функция вогнутая на промежутке $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ и на промежутке $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Точка $(x_0;f(x_0))$ называется **точкой перегиба** , если в данной точке существует касательная к графику функции и вторая производная функции меняет знак при прохождении через x_0.

Другими словами, точками перегиба могут являться точки, проходя через которые вторая производная меняет знак, в самих точках либо равна нулю, либо не существует, но эти точки входят в область определения функции.

В нашем примере точек перегиба нет, так как вторая производная меняет знак проходя через точки $x=\pm\frac{1}{2}$, а они не входят в область определения функции.

6. **Нахождение горизонтальных и наклонных асимптот.**

Горизонтальные или наклонные асимптоты следует искать лишь тогда, когда функция определена на бесконечности.

Наклонные асимптоты ищутся в виде прямых $y = kx + b$,
где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$.

Если *k=0* и *b* не равно бесконечности, то наклонная асимптота станет **горизонтальной**.

Кто такие вообще эти асимптоты?

Это такие линии, к которым приближается график функции на бесконечности. Таким образом, они очень помогают при построении графика функции.

Если горизонтальных или наклонных асимптот нет, но функция определена на плюс бесконечности и (или) минус бесконечности, то следует вычислить предел функции на плюс бесконечности и (или) минус бесконечности, чтобы иметь представление о поведении графика функции.

Для нашего примера

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{4x^2-1}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x^2-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$y = \frac{1}{4}$ - горизонтальная асимптота.

На этом с исследование функции завершается, переходим к построению графика.

7. **Вычисляем значения функции в промежуточных точках.**

Для более точного построения графика рекомендуем найти несколько значений функции в промежуточных точках (то есть в любых точках из области определения функции).

Для нашего примера найдем значения функции в точках *x=-2* , *x=-1* , *x=-3/4* , *x=-1/4* . В силу четности функции, эти значения будут совпадать со значениями в точках *x=2* , *x=1* , *x=3/4* , *x=1/4.*

$$f(-2)=f(2)=\frac{2^2}{4\cdot 2^2-1}=\frac{4}{15}\approx 0{,}27$$

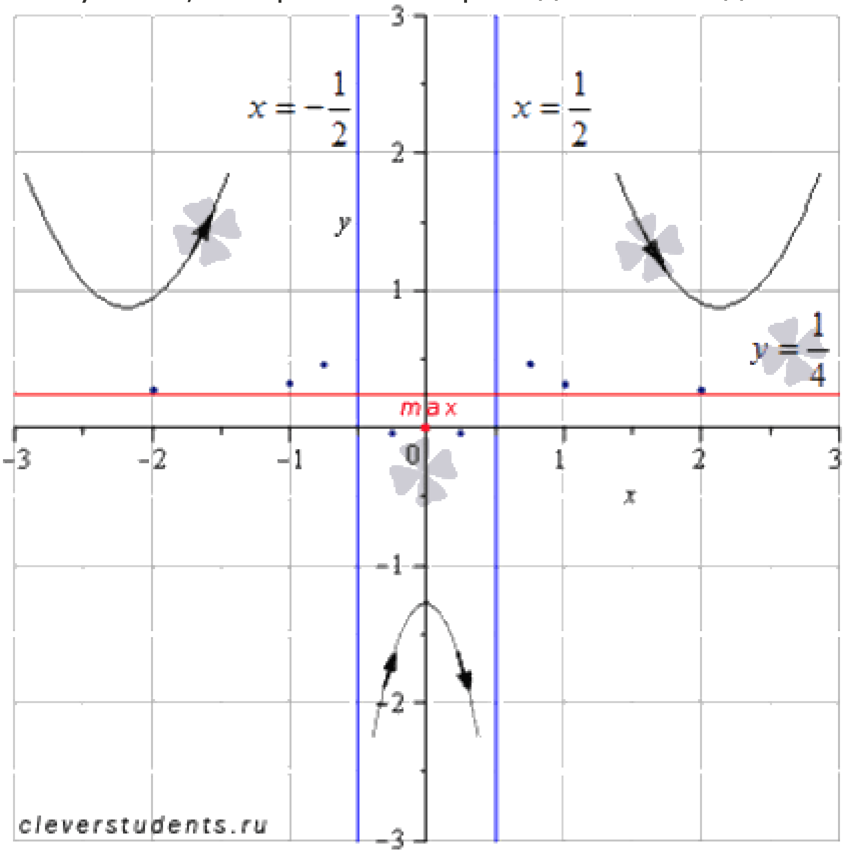
$$f(-1)=f(1)=\frac{1^2}{4\cdot 1^2-1}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{4\left(\frac{3}{4}\right)^2-1}=\frac{9}{20}=0{,}45$$

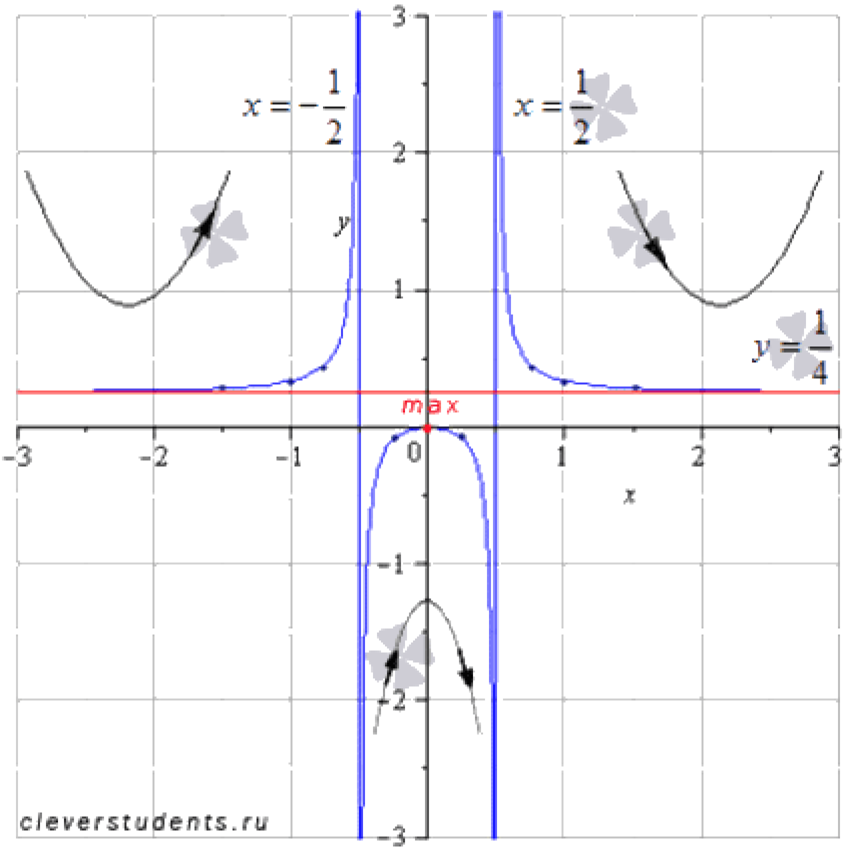
$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\left(\frac{1}{4}\right)^2-1}=-\frac{1}{12}\approx -0{,}08$$

8. **Построение графика.**

   Сначала строим асимптоты, наносим точки локальных максимумов и минимумов функции, точки перегиба и промежуточные точки. Для удобства построения графика можно нанести и схематическое обозначение промежутков возрастания, убывания, выпуклости и вогнутости, не зря же мы проводили исследование функции =).



Осталось провести линии графика через отмеченные точки, приближая к асимптотам и следуя стрелочкам.



Этим шедевром изобразительного искусства задача полного исследования функции и построения графика закончена.

Графики некоторых элементарных функций можно строить с использованием геометрических преобразований графиков основных элементарных функций.