https://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_24.php

Выпуклость функции, точки перегиба

Содержание:

График функции $y=f(x)$ $y=f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a;b)$ $(a;b)$, является на этом интервале **выпуклым**, если график этой функции в пределах интервала $(a;b)$ $(a;b)$ лежит не выше любой своей касательной (рис. 1).
График функции $y=f(x)$ $y=f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a;b)$ $(a;b)$, является на этом интервале **вогнутым**, если график этой функции в пределах интервала $(a;b)$ $(a;b)$ лежит не ниже любой своей касательной (рис. 2).

Теоремы о выпуклости функции и точках перегиба

Теорема

(Об условиях выпуклости или вогнутости графика функции)

Пусть функция $y=f(x)$ $y=f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ $(a;b)$ и имеет непрерывную, не равную нулю в точке $x_0\in(a;b)$ $x0\in(a;b)$ вторую производную. Тогда, если $f''(x)>0$ $f''(x)>0$ всюду на интервале $(a;b)$ $(a;b)$, то функция имеет **вогнутость на этом интервале**, если $f''(x)<0$ $f''(x)<0$, то функция имеет **выпуклость**.

Определение

Точкой перегиба графика функции $y=f(x)$ $y=f(x)$ называется точка $M(x_1;f(x_1))$ $M(x1;f(x1))$, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.

Теорема

(О необходимом условии существования точки перегиба)

Если функция $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_1;f(x_1))$, то $f''(x_1)=0$ или не существует.

Теорема

(О достаточном условии существования точки перегиба)

Если:

1. первая производная $f'(x)$ непрерывна в окрестности точки x_1;
2. вторая производная $f''(x)=0$ или не существует в точке x_1;
3. $f''(x)$ при переходе через точку x_1 меняет свой знак,
   тогда в точке $M(x_1;f(x_1))$ функция $y=f(x)$ имеет перегиб.

Схема исследования функции на выпуклость, вогнутость

1. Найти вторую производную функции.
2. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой найденной точки и сделать вывод об интервалах выпуклости и точках перегиба.

Пример

Задание. Найти интервалы выпуклости/вогнутости функции $y=\frac{x^3}{6}-x^2+3x+1$

Решение. Найдем вторую производную заданной функции:

$y''=\left(\frac{x^3}{6}-x^2+3x+1\right)''=\left(\frac{x^2}{2}-2x+3\right)'=x-2$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю, для этого решаем уравнение $y''(x)=0$:

$y''(x)=x-2=0 \Rightarrow x=2$

Исследуем знак второй производной слева и справа от полученной точки:

Так как на промежутке $(-\infty;2)$ вторая производная $y''(x)<0$, то на этом промежутке функция $y(x)$ выпукла; в силу того, что на промежутке $(2;+\infty)$ вторая производная $y''(x)>0y''(x)>0$ - функция вогнута. Так как при переходе через точку $x=2x=2$ вторая производная сменила знак, то эта точка является точкой перегиба графика функции.

Ответ. Точка $x=2x=2$ - точка перегиба графика функции.

На промежутке $(-\infty;2)(-\infty;2)$ функция выпукла, на промежутке $(2;+\infty)(2;+\infty)$ функция вогнута.

https://function-x.ru/derivative4.html

Понятие асимптоты

Если предварительно построить асимптоты кривой, то многих случаях построение графика функции облегчается.

Судьба асимптоты полна трагизма. Представьте себе, каково это: всю жизнь двигаться по прямой к заветной цели, подойти к ней максимально близко, но так и не достигнуть её. Например, стремиться соединить свой жизненный путь с путём желанного человека, в какой-то момент приблизиться к нему почти вплотную, но даже не коснуться его. Или стремиться заработать миллиард, но до достижения этой цели и записи в книгу рекордов Гиннеса для своего случая не достаёт сотых долей цента. И тому подобное. Так и с асимптотой: она постоянно стремится достигнуть кривой графика функции, приближается к нему на минимальное возможное расстояние, но так и не касается его.

Определение 1. Асимптотами называются такие прямые, к которым сколь угодно близко приближается график функции, когда переменная стремится к плюс бесконечности или к минус бесконечности.

Определение 2. Прямая называется асимптотой графика функции, если расстояние от переменной точки *M* графика функции до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки *M* от начала координат по какой-либо ветви графика функции.

Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты

Первое, что нужно узнать о вертикальных асимптотах: они параллельны оси Oy.

Определение. Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой графика функции***, если точка $x = a$ является **точкой разрыва второго рода** для этой функции.

Из определения следует, что прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий:

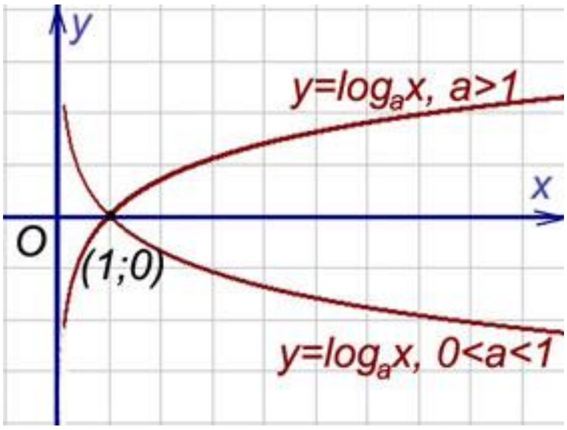
- $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ (***предел функции** при значении аргумента, стремящимся к некоторому значению а слева, равен плюс или минус бесконечности*)
- $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$ (***предел функции при значении аргумента, стремящимся к некоторому значению а справа, равен плюс или минус бесконечности***).

При этом функция $f(x)$ может быть вообще не определена соответственно при $x \geq a$ и $x \leq a$.

Замечание:

- символом $x \to a+0$ обозначается стремление *x* к *a* справа, причём *x* остаётся больше *a*;
- символом $x \to a-0-$ обозначается стремление *x* к *a* слева, причём *x* остаётся меньше *a*.

Из сказанного следует, что вертикальные асимптоты графика функции можно искать не только в **точках разрыва**, но и на границах **области определения**. График функции, **непрерывной** на всей числовой прямой, вертикальных асимптот не имеет.



Пример 1. График функции $y=\ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (т.е. совпадающую с осью Oy) на границе области определения, так как предел функции при стремлении икса к нулю справа равен минус бесконечности:

$$\lim_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$$

(рис. сверху).

Найти асимптоты графика функции самостоятельно, а затем посмотреть решения

Пример 2. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{2}{x-5}$.

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y = \operatorname{tg}\ x$

Пример 4. Найти асимптоты график функции $y = e^{\frac{1}{x}}$.

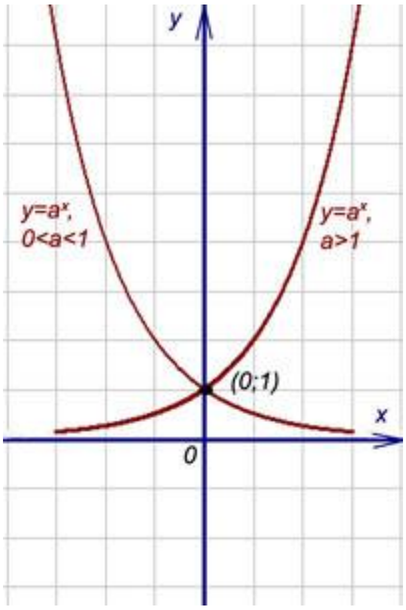
Посмотреть решения и ответы примеров 2, 3, 4.

Нет времени вникать в решение? Можно заказать работу!

Горизонтальные асимптоты

Первое, что нужно узнать о горизонтальных асимптотах: они параллельны оси Ox.

Если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ (предел функции при стремлении аргумента к плюс или минус бесконечности равен некоторому значению b), то $y = b$ – ***горизонтальная асимптота*** кривой $y = f(x)$ (правая при иксе, стремящимся к плюс бесконечности, левая при иксе, стремящимся к минус бесконечности, и двусторонняя, если пределы при стремлении икса к плюс или минус бесконечности равны).



Пример 5. График функции

$y = a^x$

при $a > 1$ имеет левую горизонтальную асимптоту $y = 0$ (т.е. совпадающую с осью Ox), так как предел функции при стремлении "икса" к минус бесконечности равен нулю:

$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$

Правой горизонтальной асимптоты у кривой нет, поскольку предел функции при стремлении "икса" к плюс бесконечности равен бесконечности:

$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$

Наклонные асимптоты

Вертикальные и горизонтальные асимптоты, которые мы рассмотрели выше, параллельны осям координат, поэтому для их построения нам требовалось лишь определённое число -

точка на оси абсцисс или ординат, через которую проходит асимптота. Для наклонной асимптоты необходимо больше - угловой коэффициент *k*, который показывает угол наклона прямой, и свободный член *b*, который показывает, насколько прямая находится выше или ниже начала координат. Не успевшие забыть аналитическую геометрию, а из неё - уравнения прямой, заметят, что для наклонной асимптоты находят **уравнение прямой с угловым коэффициентом**. Существование наклонной асимптоты определяется следующей теоремой, на основании которой и находят названные только что коэффициенты.

Теорема. Для того, чтобы кривая $y = f(x)$ имела асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы *k* и *b* рассматриваемой функции при стремлении переменной *x* к плюс бесконечности и минус бесконечности:

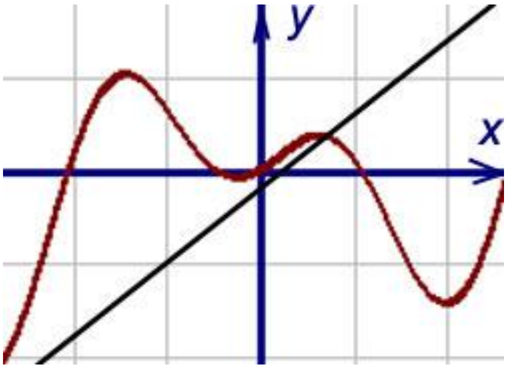
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] \qquad (1)$$

и

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - kx\right]. \qquad (2)$$

Найденные таким образом числа *k* и *b* и являются коэффициентами наклонной асимптоты.

В первом случае (при стремлении икса к плюс бесконечности) получается правая наклонная асимптота, во втором (при стремлении икса к минус бесконечности) – левая. Правая наклонная асимптота изображена на рис. снизу.



При нахождении уравнения наклонной асимптоты необходимо учитывать стремление икса и к плюс бесконечности, и к минус бесконечности. У некоторых функций, например, у дробно-рациональных, эти пределы совпадают, однако у многих функций эти пределы различны а также может существовать только один из них.

При совпадении пределов при иксе, стремящемся к плюс бесконечности и к минус бесконечности прямая $y = kx + b$ является двусторонней асимптотой кривой.

Если хотя бы один из пределов, определяющих асимптоту $y = kx + b$, не существует, то график функции не имеет наклонной асимптоты (но может иметь вертикальную).

Нетрудно видеть, что горизонтальная асимптота $y = b$ является частным случаем наклонной $y = kx + b$ при $k = 0$.

Поэтому если в каком-либо направлении кривая имеет горизонтальную асимптоту, то в этом направлении нет наклонной, и наоборот.

Пример 6. Найти асимптоты графика функции

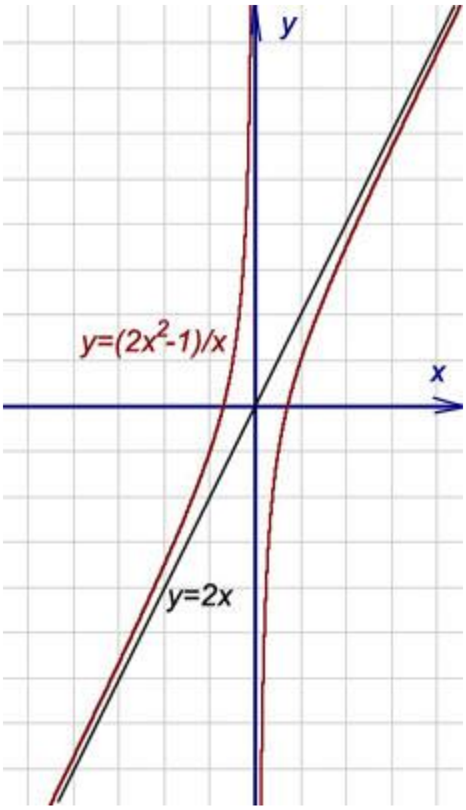
$$y = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

Решение. Функция определена на всей числовой прямой, кроме $x = 0$, т.е.

$$D(f) =]-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty[.$$

Поэтому в точке разрыва $x = 0$ кривая может иметь вертикальную асимптоту. Действительно, предел функции при стремлении икса к нулю слева равен плюс бесконечности:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{2x^2 - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x \to 0-0} \left(2x - \frac{1}{x}\right) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$



Следовательно, $x = 0$ – вертикальная асимптота графика данной функции.

Горизонтальной асимптоты график данной функции не имеет, так как предел функции при стремлении икса к плюс бесконечности равен плюс бесконечности:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2x - \frac{1}{x}\right) = \pm\infty.$$

Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-1}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right) = 2;$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(2x - \frac{1}{x} - 2x\right) = 0.$$

Получили конечные пределы $k = 2$ и $b = 0$. Прямая $y = 2x$ является двусторонней наклонной асимптотой графика данной функции (рис. внутри примера).

Пример 7. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{2x-3x^2}{x+1}$$

Решение. Функция имеет одну точку разрыва $x=-1$. Вычислим односторонние пределы и определим вид разрыва:

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{2x-3x^2}{x+1}=\frac{2\bullet(-1)-3\bullet(-1)^2}{-1+0+1}=\frac{-5}{+0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{2x-3x^2}{x+1}=\frac{2\bullet(-1)-3\bullet(-1)^2}{-1-0+1}=\frac{-5}{-0}=+\infty.$$

Заключение: $x=-1$ - точка разрыва второго рода, поэтому прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой графика данной функции.

Ищем наклонные асимптоты. Так как данная функция - дробно-рациональная, пределы при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ будут совпадать. Таким образом, находим коэффициенты для подстановки в уравнение прямой - наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x-3x^2}{x+1}}{x}=$$

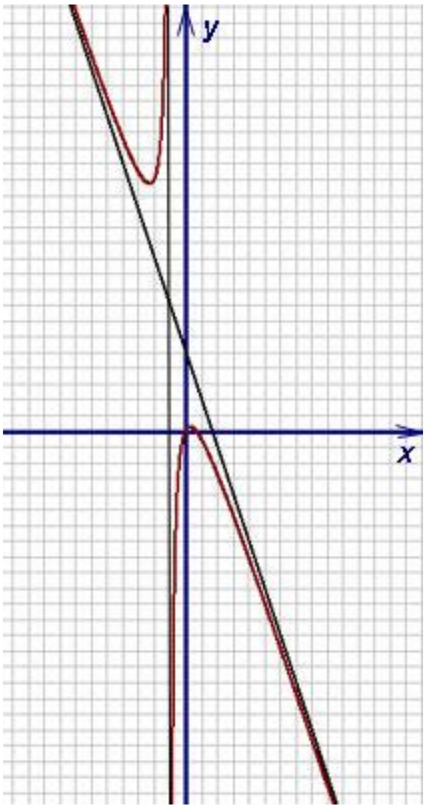
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2-3x)}{(x+1)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3x}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{x}-3}{1+\dfrac{1}{x}}=-3;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3x^2}{x+1}+3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3x^2+3x^2+3x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x+1}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{1+\dfrac{1}{x}}=5.$$



Подставляя найденные коэффициенты в уравнение прямой с угловым коэффициентом, получаем уравнение наклонной асимптоты:

$y = -3x + 5.$

На рисунке график функции обозначен бордовым цветом, а асимптоты - чёрным.

Пример 8. Найти асимптоты графика функции

$y = (x+2)e^{-x}$.

Решение. Так как данная функция непрерывна, её график не имеет вертикальных асимптот. Ищем наклонные асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)e^{-x} =$$

$$= 1 \bullet 0 = 0;$$

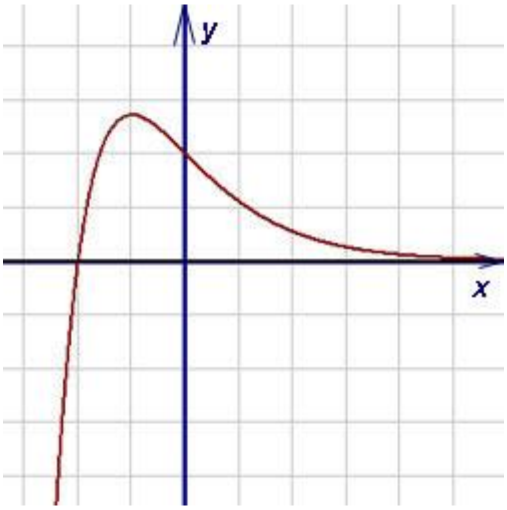
$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} \left((x+2)e^{-x} - 0x\right) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^{-x} =$$

$$= (\infty \bullet 0) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0;$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+2)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)e^{-x} =$$

$$= 1 \bullet \infty = \infty.$$

Таким образом, график данной функции имеет асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$ и не имеет асиптоты при $x \to -\infty$.



Пример 9. Найти асимптоты графика функции

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}.$$

Решение. Сначала ищем вертикальные асимптоты. Для этого найдём область определения функции. Функция определена, когда выполняется неравенство $\frac{x^3}{x-2} \geq 0$ и при этом $x \neq 2$. Знак переменной x совпадает со знаком x^3. Поэтому рассмотрим эквивалентное неравенство $\frac{x}{x-2} \geq 0$. Из этого получаем область определения функции: $x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$. Вертикальная асимптота может быть только на границе области определения функции. Но $x = 0$ не может быть вертикальной асимптотой, так как функция определена при $x = 0$.

Рассмотрим правосторонний предел при $x \to 2$ (левосторонний предел не существует):

$$\lim_{x \to 2+0} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \sqrt{\frac{8}{2+0-2}} = \infty.$$

Точка $x = 2$ - точка разрыва второго рода, поэтому прямая $x = 2$ - вертикальная асимптота графика данной функции.

Ищем наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-2)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}=\sqrt{\frac{1}{1-0}}=1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{x^3}{(x-2)x^2}}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}-1\right)=(\infty\bullet 0)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x-2}}-1}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x-2}{x}}\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^2=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{x}}\right)^2=\left(\frac{1}{1-0}\right)^2=1.$$

Итак, $y=x+1$ - наклонная асимптота графика данной функции при $x\to+\infty$. Ищем наклонную асимптоту при $x\to-\infty$:

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-2)}}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^3-2x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}=$$

$$=-1.$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+1\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{\frac{x^3}{(x-2)x^2}}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)=(\infty\bullet0)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

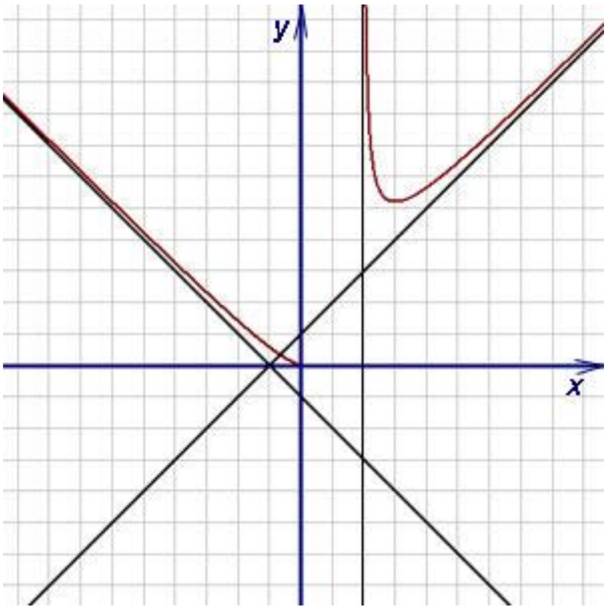
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{2\bullet\sqrt{\frac{x}{x-2}}}\bullet\frac{x-2-x}{(x-2)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x-2}{x}}\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{(x-2)^2}=-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^2=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{x}}\right)^2=-1.$$

Итак, $y=-x-1$ - наклонная асимптота при $x\to-\infty$.



Пример 10. Найти асимптоты графика функции

$$y = x + \frac{\sin x}{x}$$

Решение. Функция имеет область определения $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Так как вертикальная асимптота графика этой функции может быть только на границе области определения, найдём односторонние пределы функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to +0} \left(x + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to -0} \left(x + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1.$$

Оба предела нашли, используя первый замечательный предел.
Заключение: $x = 0$ - точка устранимого разрыва, поэтому у графика функции нет вертикальных асимптот.

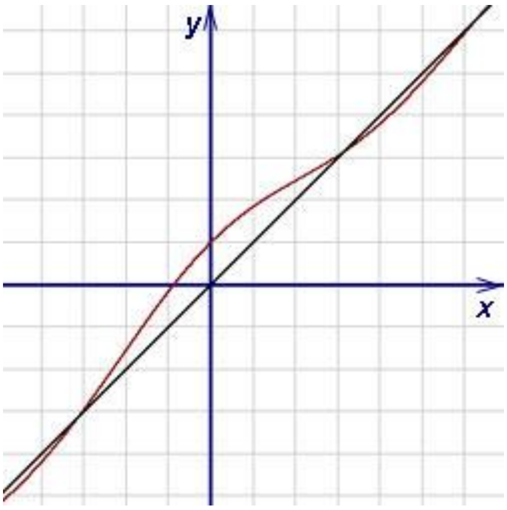
Ищем наклонные асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{\sin x}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x^2} \right) = 1 + 0 + 1;$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{\sin x}{x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$



Таким образом, при $x \to +\infty$ наклонной асимптотой графика данной функции является прямая $y = x$. Но при $x \to -\infty$ найденные пределы не изменяются. Поэтому при $x \to -\infty$ наклонной асимптотой графика данной функции также является $y = x$.

Пример 11. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{2x^3 + 1}{x^2 - 4}.$$

Решение. Сначала найдём вертикальные асимптоты. Для этого найдём точки разрыва функции и их виды. Знаменатель не может быть равным нулю, поэтому должно соблюдаться условие $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$. Функция имеет две точки разрыва: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Чтобы установить вид разрыва, найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2x^3+1}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 2+0}\frac{2x^3+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{17}{+0\bullet 4}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2x^3+1}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 2-0}\frac{2x^3+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{17}{-0\bullet 4}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{2x^3+1}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to -2+0}\frac{2x^3+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{-15}{-4\bullet(+0)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{2x^3+1}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to -2-0}\frac{2x^3+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{-15}{-4\bullet(-0)}=-\infty;$$

Так как все пределы равны бесконечности, обе точки разрыва - второго рода. Поэтому график данной функции имеет две вертикальные асимптоты: $x = 2$ и $x = -2$.

Ищем наклонные асимптоты. Так как данная функция является дробно-рациональной, пределы при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ совпадают. Поэтому, определяя коэффициенты прямой, ищем просто пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{(x^2-4)x}=$$

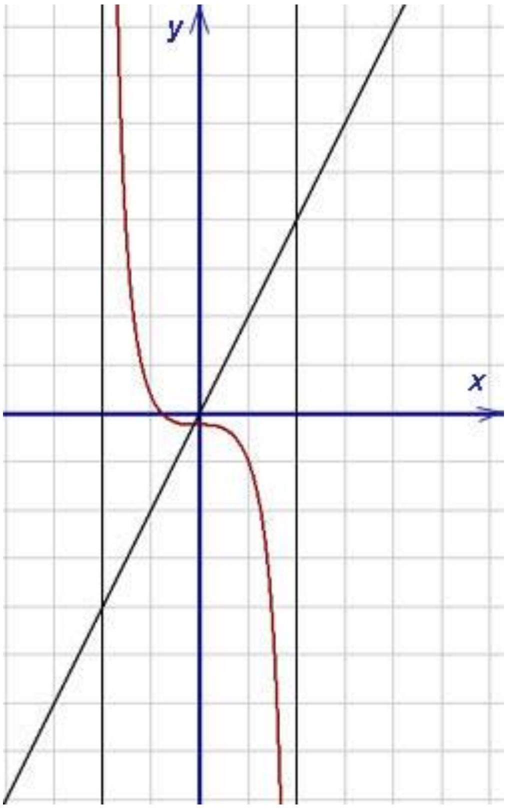
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{x^3-4x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}}=$$

$$=\frac{2+0}{1-0}=2;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+1}{x^2-4}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1-2x^3+8x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+8x}{x^2-4}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x}}{1-\frac{4}{x}}=\frac{0+0}{1-0}=0.$$



Подставляем найденные коэффициенты в уравнение прямой с угловым коэффициентом, получаем уравнение наклонной асимптоты $y = 2x$. Таким образом, график данной функции имеет три асимптоты: $x = 2$, $x = -2$ и $y = 2x$.

Найти асимптоты графика функции самостоятельно, а затем посмотреть решения

Пример 12. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

[Правильное решение и ответ](#).

Пример 13. Найти асимптоты графика функции $y = e^{-x} \sin x + x$.

[Правильное решение и ответ](#).

К началу страницы

Пройти тест по теме Производная, дифференциал и их применение