

Добрый день,

Законспектируйте данный материал по 4 файлам

Срок сдачи нового материала и долгов по конспектам до 5,02,21

http://mathprofi.ru/vozrastanie_ubyvanie_ekstremumy_funkcii.html

Возрастание, убывание и экстремумы функции

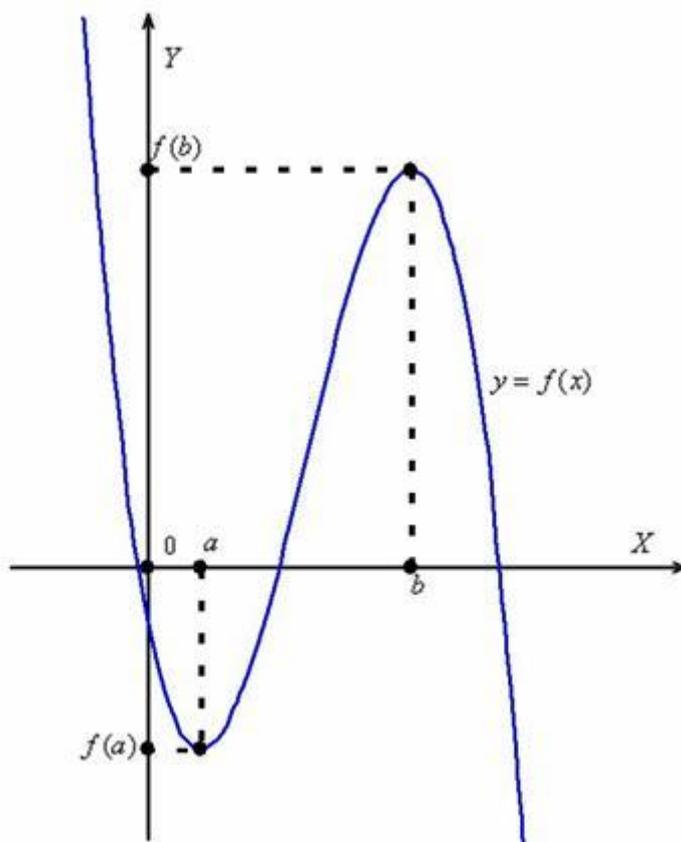
Нахождение интервалов возрастания, убывания и экстремумов функции является как самостоятельной задачей, так и важнейшей частью других заданий, в частности, полного исследования функции. Начальные сведения о возрастании, убывании и экстремумах функции даны в теоретической главе о производной, которую я настоятельно рекомендую к предварительному изучению (*либо повторению*) – ещё и по той причине, что нижеследующий материал базируется на самой *сути производной*, являясь гармоничным продолжением указанной статьи. Хотя, если времени в обрез, то возможна и чисто формальная отработка примеров сегодняшнего урока.

А сегодня в воздухе витает дух редкого единодушия, и я прямо чувствую, что все присутствующие горят желанием **научиться исследовать функцию с помощью производной**. Поэтому на экранах ваших мониторов незамедлительно появляется разумная добрая вечная терминология.

Зачем? Одна из причин самая что ни на есть практическая: **чтобы было понятно, что от вас вообще требуется в той или иной задаче!**

Монотонность функции. Точки экстремума и экстремумы функции

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$. Упрощённо полагаем, что она непрерывна на всей числовой прямой:



На всякий случай сразу избавимся от возможных иллюзий, особенно это касается тех читателей, кто недавно ознакомился с [интервалами знакопостоянства функции](#). Сейчас нас **НЕ ИНТЕРЕСУЕТ**, как расположен график функции относительно оси Ox (выше, ниже, где пересекает ось). Для убедительности мысленно сотрите оси и оставьте один график. Потому что интерес именно в нём.

Функция **возрастает** на интервале, если для любых двух точек этого интервала, связанных отношением $x_2 > x_1$, справедливо неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. То есть, бОльшему значению аргумента соответствует бОльшее значение функции, и её график идёт «снизу вверх». Демонстрационная функция $y = f(x)$ растёт на интервале (a, b) .

Аналогично, функция **убывает** на интервале, если для любых двух точек данного интервала, таких, что $x_2 > x_1$, справедливо неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. То есть, бОльшему значению аргумента соответствует мЕньшее значение функции, и её график идёт «сверху вниз». Наша функция $y = f(x)$ убывает на интервалах $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$.

Если функция возрастает или убывает на интервале, то её называют **строго монотонной** на данном интервале. Что такое монотонность? Понимайте в буквальном смысле – однообразиие.

Также можно определить **неубывающую** функцию (смягчённое условие $f(x_2) \geq f(x_1)$ в первом определении) и **невозрастающую** функцию (смягчённое условие $f(x_2) \leq f(x_1)$ во 2-м определении). Неубывающую или невозрастающую функцию на интервале называют монотонной функцией на данном интервале (*строгая монотонность – частный случай «просто» монотонности*).

Теория рассматривает и другие подходы к определению возрастания/убывания функции, в том числе на полуинтервалах, отрезках, но чтобы не выливать на вашу голову масло-масло-масляное, договоримся оперировать открытыми интервалами с категоричными определениями – это чётче, и для решения многих практических задач вполне достаточно.

Таким образом, **в моих статьях за формулировкой «монотонность функции» почти всегда будут скрываться интервалы строгой монотонности** (строгого возрастания или строгого убывания функции).

Окрестность точки. Слова, после которых студенты разбегаются, кто куда может, и в ужасе прячутся по углам. ...Хотя после поста [Пределы по Коши](#) уже, наверное, не прячутся, а лишь слегка вздрагивают =) Не беспокойтесь, сейчас не будет доказательств теорем математического анализа – окрестности мне потребовались, чтобы строже сформулировать определения *точек экстремума*. Вспоминаем:

Окрестностью точки называют интервал, который содержит данную точку, при этом для удобства интервал часто полагают симметричным. Например, точка $x = a$ и её стандартная δ -окрестность:



Собственно, определения:

Точка x_0 называется **точкой строгого максимума**, если *существует* её δ -окрестность, **для всех** значений x которой за исключением самой точки x_0 выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$. В нашем конкретном примере это точка b .

Точка x_0 называется **точкой строгого минимума**, если *существует* её δ -окрестность, **для всех** значений x которой за исключением самой точки x_0 выполнено неравенство $f(x) > f(x_0)$. На чертеже – точка «а».

Примечание: требование симметричности окрестности вовсе не обязательно. Кроме того, важен **сам факт существования** окрестности (хоть малюсенькой, хоть микроскопической), удовлетворяющей указанным условиям

Точки a, b называют **точками строго экстремума** или просто **точками экстремума** функции. То есть это обобщенный термин точек максимума и точек минимума.

Как понимать слово «экстремум»? Да так же непосредственно, как и монотонность. Экстремальные точки американских горок.

Как и в случае с монотонностью, в теории имеют место и даже больше распространены нестрогие постулаты (*под которые, естественно, подпадают рассмотренные строгие случаи!*):

Точка x_0 называется **точкой максимума**, если *существует* её окрестность, такая, что **для всех** значений x данной окрестности выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точка x_0 называется **точкой минимума**, если *существует* её окрестность, такая, что **для всех** значений x данной окрестности выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Заметьте, что согласно последним двум определениям, любая точка функции-константы (либо «ровного участка» какой-нибудь функции) считается как точкой максимума, так и точкой минимума! Функция $f(x) = C$, к слову, одновременно является и невозрастающей и неубывающей, то есть монотонной. Однако оставим сии рассуждения теоретикам, поскольку на практике мы почти всегда созерцаем традиционные «холмы» и «впадины» (см. чертёж) с уникальным «царём горы» $f(b)$ или «принцессой болота» $f(a)$. Как разновидность, встречается *остриё*, направленное вверх либо вниз, например, минимум функции $y = |x|$ в точке $x = 0$.

Да, кстати, о королевских особах:

- значение $f(b)$ называют **максимумом** функции;
- значение $f(a)$ называют **минимумом** функции.

Общее название – **экстремумы** функции.

Пожалуйста, будьте аккуратны в словах!

Точки экстремума – это «иксовые» значения.

Экстремумы – «игрековые» значения.

! Примечание: иногда перечисленными терминами называют точки «икс-игрек», лежащие непосредственно на САМОМ ГРАФИКЕ функции.

Сколько может быть экстремумов у функции?

Ни одного, 1, 2, 3, ... и т.д. до бесконечности. Например, у синуса бесконечно много минимумов и максимумов.

ВАЖНО! Термин «максимум функции» **не тождественен** термину «максимальное значение функции». Легко заметить, что значение $f(b)$ максимально лишь в локальной окрестности, а слева сверху есть и «покруче товарищи». Аналогично, «минимум функции» – не то же самое, что «минимальное значение функции», и на чертеже мы видим, что значение $f(a)$ минимально только на определённом участке. В этой связи точки экстремума также называют *точками локального экстремума*, а экстремумы – *локальными экстремумами*. Ходят-бродят неподалёку и *глобальные* собратья. Так, любая парабола имеет в своей вершине *глобальный минимум* или *глобальный максимум*. Далее я не буду различать типы экстремумов, и пояснение озвучено больше в общеобразовательных целях – добавочные прилагательные «локальный»/«глобальный» не должны заставить врасплох.

Чайникам на первых порах рекомендую создать и осмыслить небольшой терминологический конспект, чтобы не путать Иран с Ираком.

Подытожим наш небольшой экскурс в теорию контрольным выстрелом: что подразумевает задание «найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции»?

Формулировка побуждает найти:

- интервалы возрастания/убывания функции (намного реже фигурирует неубывание, невозрастание);
- точки максимума и/или точки минимума (если таковые существуют). Ну и от незачёта подальше лучше найти сами минимумы/максимумы ;-)

Как всё это определить? С помощью производной функции!

Как найти интервалы возрастания, убывания, точки экстремума и экстремумы функции?

Многие правила, по сути, уже известны и понятны из [урока о смысле производной](#).

Рассмотрим дифференцируемую на некотором интервале функцию $y = f(x)$. Тогда:

– если производная $f'(x) > 0$ на интервале, то функция $f(x)$ возрастает на данном интервале;

– если производная $f'(x) < 0$ на интервале, то функция $f(x)$ убывает на данном интервале.

Примечание: справедливы и обратные утверждения.

Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $y = f(x)$. Данная точка называется **критической**, если в ней производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$ либо значения $f'(x_0)$ не существует. Критическая точка может

быть точкой экстремума. А может и не быть. Очень скоро мы рассмотрим необходимые и достаточные условия существования экстремума.

Но сначала потренируемся на кошках разделаемся с простейшими примерами. Почин положен в конце [теоретической статьи о производной](#), и на очереди другие жертвы анализа. Заодно есть возможность провести маленькое самотестирование – насколько хорошо вы запомнили, как выглядят [графики жизненно важных функций](#)? В тяжелом случае, конечно же, следует открыть первый урок на соседней вкладке и щёлкать туда-сюда по мере комментариев.

Производная кубической функции $f(x) = x^3$ неотрицательна:

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \geq 0 \quad \text{для любого «икс»}.$$

Действительно, кубическая парабола идёт «снизу вверх». *Бесконечно близко* около точки $x = 0$ *скорость изменения* функции равна нулю, о чём в рупор кричит производная: $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. И вот вам, кстати, сразу пример, когда в критической точке нет максимума или минимума функции.

Функция $f(x) = \sqrt{x}$ обитает на промежутке $[0; +\infty)$, а её производная

неравенством $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ однозначно показывает, что «корень из икс» строго растёт на интервале $(0; +\infty)$. В критической точке $x = 0$ функция [определена](#), но не дифференцируема.

С геометрических позиций тут нет [общей касательной](#). Однако в теории рассматриваются так называемые *односторонние производные*, и в указанной точке существует *правосторонняя производная с правосторонней касательной*. Желающие разобраться в этом подробнее могут покурить первый том матана.

Примечание: согласно информации первого параграфа, точка $x = 0$ не является точкой минимума функции $f(x) = \sqrt{x}$ (хотя «по понятиям» это вроде бы так). Дело в том, что определения точек максимума и минимума предполагают существование функции **и слева и справа** от данных точек. Так же не считаются точками экстремума крайние значения области определения арксинуса и арккосинуса (см. ниже).

Стандартная гипербола $f(x) = \frac{1}{x}$ идёт «сверху вниз», то есть данная функция убывает на всей [области определения](#). Что и показывает её производная:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{для любого «икс» кроме нуля}.$$

Здесь, к слову, точка $x = 0$ вообще не считается критической, так как

функция $f(x) = \frac{1}{x}$ банально в ней не определена.

Экспоненциальная функция $f(x) = e^x$ растёт на всей числовой прямой (для любого значения «икс» справедливо строгое неравенство $f'(x) = e^x > 0$).

Исследуя же производную $f'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x} < 0$, легко сделать вывод, что функция $f(x) = e^{-x}$ наоборот – убывает на \mathbb{R} .

Что делает натуральный логарифм $f(x) = \ln x$ сегодня вечером?

Растёт:

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{на интервале } (0; +\infty).$$

Начертите/распечатайте на соседних либо одном чертеже (или просто представьте в уме) графики функции $f(x) = \sin x$ и её производной $f'(x) = \cos x$. Там, где график косинуса находится над осью Ox , синус растёт. Обратное – где график $f'(x) = \cos x$ расположен ниже оси абсцисс, синус убывает. А в тех точках, где косинус пересекает ось ($f'(x) = 0$), синусоида $f(x) = \sin x$ достигает минимума или максимума.

Аналогичная история с косинусом $f(x) = \cos x$ и его производной $f'(x) = -\sin x$ (второй кадр запечатлён в статье [Геометрические преобразования графиков](#)).

Производная тангенса $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ несёт бодрящую весть о том, что функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ возрастает на всей [области определения](#).

С котангенсом и его производной $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ ситуация ровно противоположная.

Арксинус на интервале $(-1; 1)$ растёт – производная здесь

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

положительна:

При $x = -1, x = 1$ функция $f(x) = \arcsin x$ определена, но не дифференцируема.

Однако в критической точке $x = -1$ существует правосторонняя производная и правосторонняя касательная, а на другом краю – их левосторонние визави.

Думаю, вам не составит особого труда провести похожие рассуждения для арккосинуса и его производной.

Все перечисленные случаи, многие из которых представляют собой [табличные производные](#), напоминаю, следуют непосредственно из [определения производной](#).

Зачем исследовать функцию с помощью производной?

Чтобы лучше узнать, как выглядит график этой функции: где он идёт «снизу вверх», где «сверху вниз», где достигает минимумов максимумов (если вообще достигает). Не все функции такие простые – в большинстве случаев у нас вообще нет ни малейшего представления о графике той или иной функции.

Настала пора перейти к более содержательным примерам и рассмотреть **алгоритм нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции:**

Пример 1

Найти интервалы возрастания/убывания и экстремумы функции

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$$

Решение:

1) На первом шаге нужно найти область определения функции, а также взять на заметку точки разрыва (если они существуют). В данном случае функция непрерывна на всей числовой прямой, и данное действие в известной степени формально. Но в ряде случаев здесь разгораются нешуточные страсти, поэтому отнесёмся к абзацу без пренебрежения.

2) Второй пункт алгоритма обусловлен

необходимым условием экстремума:

Если в точке x_0 есть экстремум, то $f'(x_0) = 0$ либо значения $f'(x_0)$ не существует.

Смушает концовка? Экстремум функции «модуль икс».

Условие необходимо, но **не достаточно**, и обратное утверждение справедливо далеко не всегда. Так, из равенства $f'(x_0) = 0$ ещё не следует, что функция достигает максимума или минимума в точке x_0 . Классический пример уже засветился выше – это кубическая парабола $f(x) = x^3$ и её критическая точка $x = 0$.

Но как бы там ни было, необходимое условие экстремума диктует надобность в отыскании подозрительных точек. Для этого следует найти производную и решить уравнение $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1 \right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 5 - 0 = -x^2 + 6x - 5$$

Получилось обычное квадратное уравнение:

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$D = 36 - 20 = 16 > 0$$

Положительный дискриминант доставляет две критические точки:

$$\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$$

$$x = \frac{-6 + 4}{-2} = 1$$

$$x = \frac{-6 - 4}{-2} = 5$$

Примечание: корни можно традиционно обозначить через x_1, x_2 , однако в ходе полного исследования функции удобнее обойтись без подстрочных индексов, так как они вносят лишние оговорки и путаницу

Итак, $x = 1, x = 5$ – критические точки

Но экстремумов в них может и не оказаться, поэтому нужно продолжить решение.

3) Нас выручит

первое достаточное условие экстремума,

которое вкратце формулируется следующим образом: пусть функция дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 . Тогда:

– если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «плюса» на «минус», то в данной точке функция достигает максимума;

– если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то в данной точке функция достигает минимума.

Тут всё очень и очень наглядно, представьте – функция росла-росла-росла, и после прохождения некоторого рубежа вдруг стала убывать. Максимум. Во втором случае график шёл-шёл-шёл «сверху вниз», а при переходе через точку x_0 развернулся в противоположную сторону. Минимум.

Исходя из вышесказанного, вытекает логичное решение: **на числовой прямой нужно отложить точки разрыва функции, критические точки и определить знаки производной на интервалах, которые входят в область определения функции.**

В рассматриваемом примере с непрерывностью на \mathbb{R} всё тип-топ, поэтому работаем только с найденными критическими точками.

Напрашивается *метод интервалов*, который уже применялся для определения интервалов знакопостоянства функции. Так почему бы его не использовать для производной? Ведь производная тоже простая смертная функция, найдёшь её – и делай всё, что хочешь.

Внимание! Сейчас мы работаем с ПРОИЗВОДНОЙ, а не с самой функцией!

Перед нами парабола $f'(x) = -x^2 + 6x - 5$, ветви которой направлены вниз, и многим читателям уже понятны знаки производной, но ради повторения снова пройдемся по всем этапам метода интервалов. Отложим на числовой прямой найденные критические точки:



I) Берём какую-нибудь точку интервала $(-\infty; 1)$ и находим значение производной в данной точке. Удобнее всего выбрать $x = 0$:

$f'(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$, значит, производная отрицательна на всём интервале $(-\infty; 1)$.

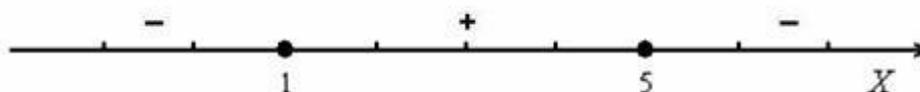
II) Выбираем точку $x = 2$, принадлежащую интервалу $(1; 5)$, и проводим аналогичное действие:

$f'(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 - 5 = -4 + 12 - 5 = 3 > 0$, следовательно, $f'(x) > 0$ на всём интервале $(1; 5)$.

III) Вычислим значение производной в наиболее удобной точке $x = 6$ последнего интервала:

$f'(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 - 5 = -36 + 36 - 5 = -5 < 0$, поэтому $f'(x) < 0$ в любой точке интервала $(5; +\infty)$.

В результате получены следующие знаки производной:



Время собирать урожай!

На интервалах $(-\infty, 1)$, $(5, +\infty)$ производная отрицательна, значит, САМА

ФУНКЦИЯ $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ на данных интервалах **убывает**, и её график идёт «сверху вниз». На среднем интервале $f'(x) > 0$, значит, функция **возрастает** на $(1, 5)$, и её график идёт «снизу вверх».

При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с «-» на «+», следовательно, в этой точке функция достигает **минимума**:

$$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 1 = -\frac{1}{3} + 3 - 5 - 1 = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$$

При переходе же через точку $x = 5$ производная меняет знак с «+» на «-», и функция достигает **максимума** в данной точке:

$$f(5) = -\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 - 1 = -\frac{125}{3} + 75 - 25 - 1 = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

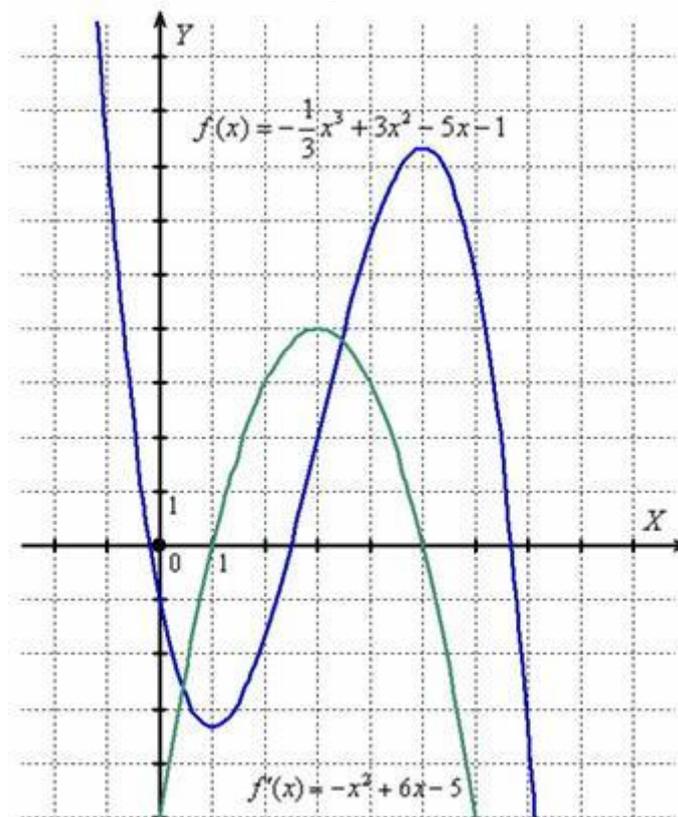
Ответ: функции возрастает на интервале $(1, 5)$ и убывает на

интервалах $(-\infty, 1)$, $(5, +\infty)$. В точке $x = 1$ функция достигает минимума: $f(1) = -3\frac{1}{3}$,

а в точке $x = 5$ – максимума: $f(5) = 7\frac{1}{3}$

Остерегайтесь сокращенной записи $\min f(x) = f(1) = -3\frac{1}{3}$, $\max f(x) = f(5) = 7\frac{1}{3}$. Под значками \min , \max обычно понимают минимальное и максимальное значение, а это, как пояснялось выше, далеко не то же самое, что минимум и максимум.

Пример так тщательно провернут через мясорубку, что грех не привести графическое изображение всех событий. Незнакомец теоретической части статьи снимает шляпу:



Что произошло? На первом этапе мы нашли производную $f'(x) = -x^2 + 6x - 5$ и критические точки $x = 1, x = 5$ (в которых парабола пересекает ось абсцисс). Затем методом интервалов было установлено, где $f'(x) < 0$ (парабола ниже оси) и $f'(x) > 0$ (парабола выше оси). Таким образом, с помощью производной мы узнали интервалы возрастания/убывания и экстремумы «синей» функции.

Помимо 1-го достаточного условия экстремума существует и **2-е достаточное условие**, однако для **исследования функций** оно малоинформативно и больше используется в **экстремальных задачах**.

В начале первой статьи **о графиках функции** я рассказывал, как быстро построить параболу на примере $f(x) = -x^2 + 2x$: «...берём первую производную и приравниваем ее к нулю: $f'(x) = (-x^2 + 2x)' = -2x + 2 = 0$...Итак, решение нашего уравнения: $x = 1$ – именно в этой точке и находится вершина параболы...». Теперь, думаю, всем понятно, почему вершина параболы находится именно в этой точке (=) Вообще, следовало бы начать с похожего примера и здесь, но он уж слишком прост (даже для чайника). К тому же, аналог есть в самом конце урока о **производной функции**. Поэтому повысим степень:

Пример 2

Найти промежутки монотонности и экстремумы функции

$$f(x) = 8x + \frac{x^4}{4}$$

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и примерный чистовой образец оформления задачи в конце урока.

Наступил долгожданный момент встречи с дробно-рациональными функциями:

Пример 3

Исследовать функцию с помощью первой производной

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Обратите внимание, как вариативно можно переформулировать фактически одно и то же задание.

Решение:

1) Функция терпит бесконечные разрывы в точках $x = -1, x = 1$.

2) Детектируем критические точки. Найдём первую производную и приравняем её к нулю:

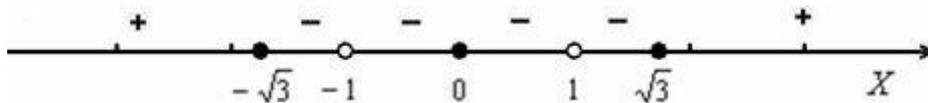
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^3)' \cdot (x^2 - 1) - x^3 \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \end{aligned}$$

Решим уравнение $f'(x) = 0$. Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю:
 $x^2(x^2 - 3) = 0$

Таким образом, получаем три критические точки:

$$x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$$

3) Откладываем на числовой прямой ВСЕ обнаруженные точки и методом интервалов определяем знаки ПРОИЗВОДНОЙ:



Напоминаю, что необходимо взять какую-нибудь точку интервала, вычислить в

ней значение производной $f'(x) = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$ и определить её знак. Выгоднее даже не считать, а «прикинуть» устно. Возьмём, например, точку $x = -1,5$, принадлежащую интервалу $(-\sqrt{3}; -1)$, и выполним

подстановку:
$$f'(-1,5) = \frac{(-1,5)^2 \cdot ((-1,5)^2 - 3)}{((-1,5)^2 - 1)^2}$$

$$(-1,5)^2 > 0$$

$$(-1,5)^2 - 3 < 0$$

$$((-1,5)^2 - 1)^2 > 0$$

Два «плюса» и один «минус» дают «минус», поэтому $f'(-1,5) < 0$, а значит, производная отрицательна и на всём интервале $(-\sqrt{3}; -1)$.

Действие, как вы понимаете, нужно провести для каждого из шести интервалов.

Кстати, обратите внимание, что множитель числителя x^2 и

знаменатель $(x^2 - 1)^2$ строго положительны для любой точки любого интервала, что существенно облегчает задачу.

Итак, производная сообщила нам, что САМА ФУНКЦИЯ $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ возрастает на $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ и убывает на $(-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{3})$. Однотипные интервалы удобно скреплять значком объединения \cup .

В точке $x = -\sqrt{3}$ функция достигает

максимума:
$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{3-1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2,6$$

В точке $x = \sqrt{3}$ функция достигает минимума:
$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$$

Подумайте, почему можно заново не пересчитывать второе значение ;-)

При переходе через точку $x = 0$ производная не меняет знак, поэтому у функции там НЕТ ЭКСТРЕМУМА – она как убывала, так и осталась убывающей.

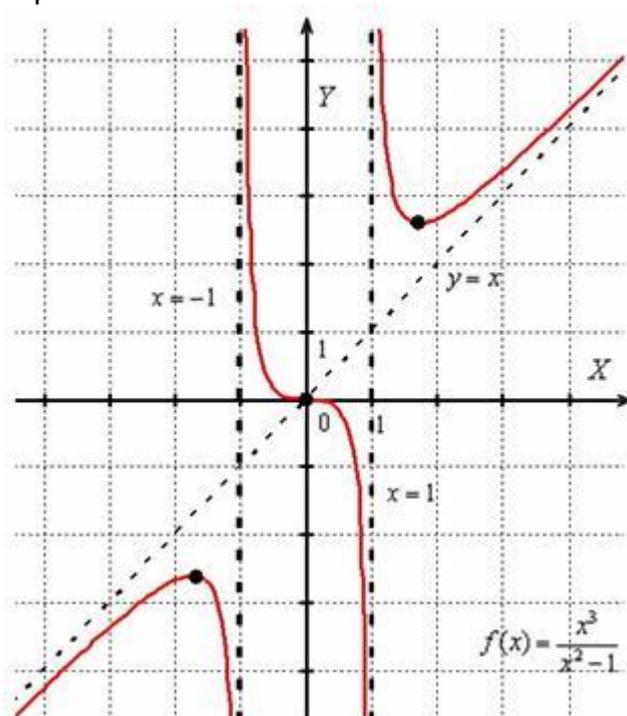
! Повторим важный момент: точки $x = -1, x = 1$ не считаются критическими – в них функция не определена. Соответственно, здесь экстремумов не может быть в принципе (даже если производная меняет знак).

Ответ: функция возрастает на $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ и убывает на $(-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{3})$. В точке $x = -\sqrt{3}$ достигается максимум

функции: $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, а в точке $x = \sqrt{3}$ – минимум: $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Знание интервалов монотонности и экстремумов вкупе с установленными **асимптотами** даёт уже очень хорошее представление о внешнем виде графика функции. Человек среднего уровня подготовки

способен устно определить, что у графика функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ есть две вертикальные асимптоты $x = -1, x = 1$ и наклонная асимптота $y = x$. Вот наш герой:



Постарайтесь ещё раз соотнести результаты исследования с графиком данной функции.

В критической точке $x = 0$ экстремума нет, но существует **перегиб графика** (что, как правило, и бывает в подобных случаях).

Пример 4

Найти экстремумы функции

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

Пример 5

Найти интервалы монотонности, максимумы и минимумы функции

$$f(x) = \frac{1-x^3}{3x}$$

...прямо какой-то Праздник «икса в кубе» сегодня получается....

Тааак, кто там на галёрке предложил за это выпить? =)

В каждой задаче есть свои содержательные нюансы и технические тонкости, которые закомментированы в конце урока.

Как отмечалось, в ходе выполнения задания всегда нужно внимательно следить за **точками разрыва** и интервалами, которые не входят в **область определения функции**. Казус состоит в том, что иногда производная может существовать на таких участках! Простейший пример: производная

натурального логарифма $f'(x) = \frac{1}{x}$ определена на интервале $(-\infty, 0)$, но сам

логарифм – нет. **Интервалы, которые не входят в область определения функции, НЕЛЬЗЯ рассматривать и у производной!**

Типичный барьерный риф:

Пример 6

Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x - 2)$$

Приближаю оформление к боевым условиям и прекращаю нумерацию пунктов алгоритма.

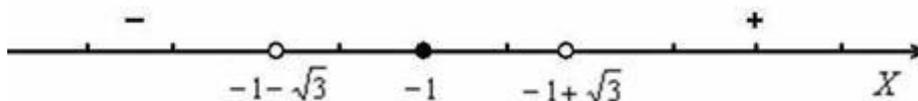
Решение: в Примере 11 статьи об [интервалах знакопостоянства](#) была найдена [область определения](#) данной

функции: $D(f) = (-\infty, -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3}, +\infty)$, знание которой **КРИТИЧЕСКИ ВАЖНО** учитывать в нашей задаче:

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 2x - 2))' = \frac{1}{x^2 + 2x - 2} \cdot (x^2 + 2x - 2)' = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 2} = 0$$

Вроде бы всё хорошо: у нас есть корень $x = -1$ и крайние точки области определения: $x = -1 - \sqrt{3}$, $x = -1 + \sqrt{3}$.

Но производная проявила своеволие – она в отличие от своего родителя определена и на интервале $(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$. Более того, точка $x = -1$ (не критическая!!! ;) вошла в этот нехороший интервал! Что делать? Мама всегда права, поэтому определяем знаки производной **только на интервалах области определения функции**:



Функция убывает на интервале $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$ и возрастает на интервале $(-1 + \sqrt{3}, +\infty)$. Точки экстремума (и, понятно, экстремумы) **ОТСУТСТВУЮТ**. Значение $x = -1$ осталось не при делах, так как на интервале $(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$ попросту нет графика функции $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 2)$.

Ответ: функция убывает на интервале $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$ и возрастает на $(-1 + \sqrt{3}, +\infty)$, экстремумы отсутствуют.

Будьте очень внимательны, если вам встретится логарифм или корень – в подобных примерах просто необходимо уважить [область определения функции](#)!

Пример 7

Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

$$f(x) = x \ln x$$

Это приятный разгрузочный пример для самостоятельного решения.

И заключительный пример посвящен другому приключению непослушной дочери:

Пример 8

Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$$

Решение: функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.

Найдём критические точки:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((3x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}(3x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 - x^3)' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2}} \cdot (6x - 3x^2) = \\ &= \frac{3x(2-x)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot (3-x)^2}} = \frac{2-x}{\sqrt[3]{x \cdot (3-x)^2}} = 0 \end{aligned}$$

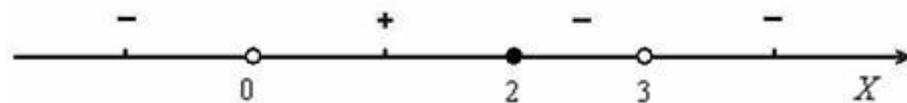
На всякий случай детализирую преобразования знаменателя:

$$\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2} = \sqrt[3]{(x^2 \cdot (3-x))^2} = \sqrt[3]{x^4 \cdot (3-x)^2} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x \cdot (3-x)^2} = x \cdot \sqrt[3]{x \cdot (3-x)^2}, \text{ затем}$$

сокращаем числитель и знаменатель на «икс».

Таким образом, $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ – критические точки. Почему значения $x = 0$, $x = 3$, обращающие знаменатель производной в ноль, следует отнести к критическим точкам? А дело в том, что САМА-ТО ФУНКЦИЯ в них определена! Ситуация необычна, но клубок распутывается по стандартной схеме.

Определим знаки производной на полученных интервалах:



Функция возрастает на интервале $(0; 2)$ и убывает на $(-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

В точке $x = 0$ функция достигает минимума: $f(0) = \sqrt[3]{3 \cdot 0^2 - 0^3} = 0$.

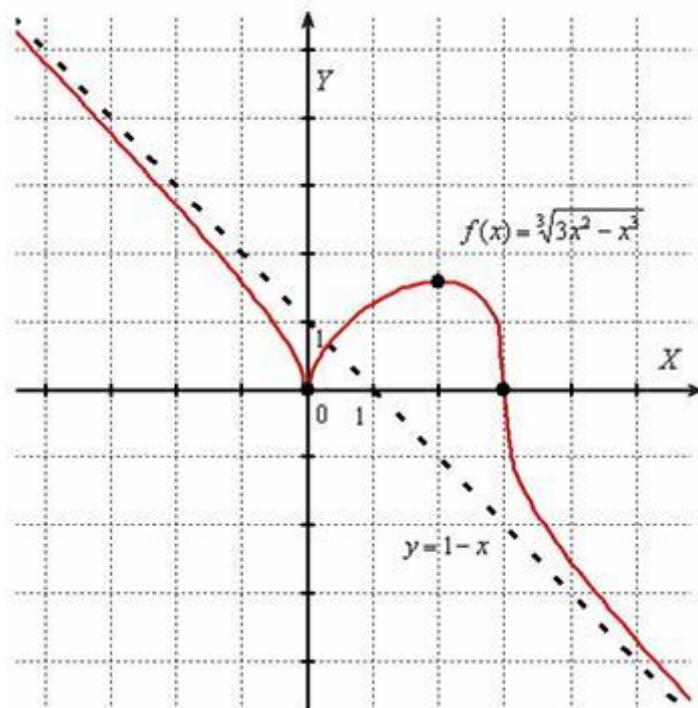
В точке $x = 2$ функция достигает максимума: $f(2) = \sqrt[3]{3 \cdot 2^2 - 2^3} = \sqrt[3]{12 - 8} = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$.

В точке $x = 3$ нет экстремума.

Ответ: $x = 0$ – точка минимума, $x = 2$ – точка максимума

По условию требовалось найти точки экстремума и что-то добавлять излишне. Но в решении как бы невзначай вычислены и сами экстремумы ;-)

Давайте посмотрим на эту оригинальную картину:



В точке $x = 0$ – классическое *остриё*, направленное вниз, при $x = 2$ – «нормальный» максимум. В точках $x = 0$, $x = 3$ функция не дифференцируема, однако в них существуют бесконечные производные и вертикальные касательные (см. [теорию производной](#)).

...да, родители и дети бывают разными. Но мама права в 95% случаев с погрешностью $\pm 2\%$. Я проводил [статистическое исследование](#).

Желаю успехов!

Решения и ответы:

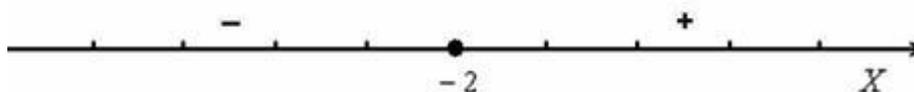
Пример 2: Решение:

- 1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.
- 2) Найдём критические точки:

$$f'(x) = \left(8x + \frac{x^4}{4} \right)' = 8 + x^3 = 0$$

$x = -2$ – критическая точка.

- 3) Методом интервалов определим знаки производной:



Ответ: функция убывает на интервале $(-\infty, -2)$ и возрастает на интервале $(-2, +\infty)$. В точке $x = -2$ функция достигает

минимума:
$$f(-2) = 8 \cdot (-2) + \frac{(-2)^4}{4} = -16 + 4 = -12$$

Пример 4: Решение:

- 1) Функция терпит бесконечный разрыв в точке $x = 2$.
- 2) Найдём критические точки:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{(x-2)^2} \right)' = \frac{(x^3)' \cdot (x-2)^2 - x^3 \cdot ((x-2)^2)'}{(x-2)^4} = \frac{3x^2 \cdot (x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} = 0$$

$x = 0$, $x = 6$ – критические точки.

3) Методом интервалов определим знаки производной:



В точке $x = 6$ функция достигает минимума:

$$f(6) = \frac{6^3}{(6-2)^2} = \frac{216}{16} = \frac{27}{2} = 13 \frac{1}{2}$$

В точке $x = 0$ экстремум отсутствует.

Ответ: в точке $x = 6$ функция достигает минимума:

$$f(6) = 13 \frac{1}{2}$$

Примечание: обратите внимание, что информацию об интервалах монотонности раскрывать не обязательно, так как по условию требовалось найти только экстремумы функции

Пример 5: Решение:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x = 0$.

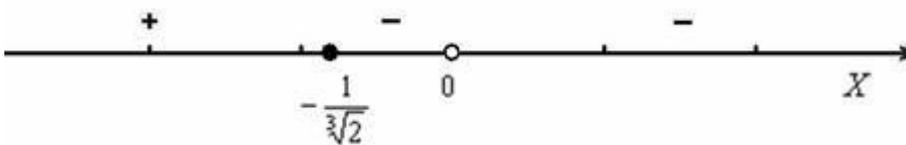
2) Найдём критические точки:

$$f'(x) = \left(\frac{1-x^3}{3x} \right)' = \left(\frac{1}{3x} - \frac{x^2}{3} \right)' = -\frac{1}{3x^2} - \frac{2x}{3} = \frac{-1-2x^3}{3x^2} = -\frac{(1+2x^3)}{3x^2} = 0$$

Примечание: в данном случае перед дифференцированием выгодно почленно разделить числитель на знаменатель

$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ – критическая точка.

3) Определим знаки производной:



Ответ: функция возрастает на $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ и убывает на $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

В точке $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ она достигает

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3}{3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{3} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

максимума:

Пример 7: Решение:

Область определения: $(0; +\infty)$.

Найдём критические точки:

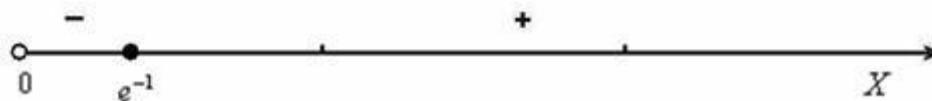
$$f'(x) = (x \ln x)' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1$$

$x = e^{-1} \approx 0,37$ – критическая точка.

Определим знаки производной:



Ответ: функция убывает на интервале $(0, e^{-1})$ и возрастает на интервале $(e^{-1}, +\infty)$. В точке $x = e^{-1}$ функция достигает минимума: $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) = -e^{-1}$