

https://pnu.edu.ru/media/filer_public/ef/e9/efe99428-42d9-41a2-bc89-0541f2c34570/biderman_dsv.pdf

http://mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html

Случайные величины. Дискретная случайная величина. Математическое ожидание

Второй раздел по [теории вероятностей](#) посвящён **случайным величинам**, которые незримо сопровождали нас буквально в каждой статье по теме. И настал момент чётко сформулировать, что же это такое:

Случайной называют **величину**, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через X, Y, Z *, а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, x_1, x_2, x_3 .

** Иногда используют U, V, W , а также греческие буквы*

Пример встретился нам на [первом же уроке по теории вероятностей](#), где мы фактически рассмотрели следующую случайную величину:

X – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только одна** грань, какая именно – не предсказать (*фокусы не рассматриваем*); при этом случайная величина X может принять одно из следующих значений:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 6.$$

Пример из статьи о [Статистическом определении вероятности](#):

Y – количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 3, \quad \dots, y_9 = 9$, либо $y_{10} = 10$ мальчиков – **один и только один** из перечисленных вариантов.

И, дабы соблюсти форму, немного физкультуры:

Z – дальность прыжка в длину (*в некоторых единицах*).

Её не в состоянии предугадать даже мастер спорта :)

Тем не менее, ваши гипотезы?

Коль скоро речь идёт о [множестве действительных чисел](#), то случайная величина Z может принять *несчётно много* значений из некоторого числового

промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы:**

1) Дискретная (*прерывная*) случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно*.

...нарисовались непонятные термины? Срочно повторяем [основы алгебры](#)!

2) Непрерывная случайная величина – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Примечание: в учебной литературе популярны аббревиатуры ДСВ и НСВ

Сначала разберём дискретную случайную величину, затем – [непрерывную](#).

Поехали:

Закон распределения дискретной случайной величины

– это *соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Довольно часто встречается термин **ряд распределения**, но в некоторых ситуациях он звучит двусмысленно, и поэтому я буду придерживаться «закона».

А теперь **очень важный момент**: поскольку случайная

величина X **обязательно** примет **одно из значений** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то соответствующие события образуют [полную группу](#) и сумма вероятностей их наступления равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

или, если записать свёрнуто:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Так, например, закон распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:

	1	2	3	4	5	6
X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Без комментариев.

Возможно, у вас сложилось впечатление, что дискретная случайная величина может принимать только «хорошие» целые значения. Развеем иллюзию – они могут быть любыми:

Пример 1

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

U	-5	2,5	10
	0,5	p_2	0,1

Найти p_2

...наверное, вы давно мечтали о таких задачах :) Открою секрет – я тоже. В особенности после того, как завершил работу над [теорией поля](#).

Решение: так как случайная величина U может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют *полную группу*, а значит, сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Разоблачаем «партизана»:

$$0,5 + p_2 + 0,1 = 1$$

$$p_2 + 0,6 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - 0,6 \text{ – таким образом, вероятность}$$

выигрыша $u_2 = 2,5$ условных единиц составляет 0,4.

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0,5 + 0,4 + 0,1 = 1$, в чём и требовалось убедиться.

Ответ: $p_2 = 0,4$

Не редкость, когда закон распределения требуется составить самостоятельно. Для этого используют [классическое определение вероятности](#), [теоремы умножения / сложения вероятностей событий](#) и другие фишки [тервера](#):

Пример 2

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей.

Составить закон распределения случайной величины V – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

Решение: как вы заметили, значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно $v_1 = 0$ рублей.

Всего таковых билетов $50 - 12 = 38$, и по [классическому определению](#):

$$p_1 = \frac{38}{50} = 0,76 \text{ – вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.}$$

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша $v_2 = 100$ рублей составляет:

$$p_2 = \frac{10}{50} = 0,2$$

И для $v_3 = 1000$:

$$p_3 = \frac{2}{50} = 0,04$$

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0,76 + 0,2 + 0,04 = 1$ – и это особенно приятный момент таких заданий!

Ответ: искомый закон распределения выигрыша:

V	0	100	1000
	0,76	0,2	0,04

Следующее задание для самостоятельного решения:

Пример 3

Вероятность того, что стрелок поразит мишень, равна $p = 0,7$. Составить закон распределения случайной величины W – количества попаданий после 2 выстрелов.

...я знал, что вы по нему соскучились :) Вспоминаем [теоремы умножения и сложения](#). Решение и ответ в конце урока.

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно (а иногда и полезнее) знать лишь некоторые её **числовые характеристики**.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Говоря простым языком, это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина X принимает

значения $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ соответственно. Тогда математическое ожидание $M(X)$ данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

или в свёрнутом виде:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины X – количества выпавших на игральном кубике очков:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5 \text{ очка}$$

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то *среднее значение* выпавших очков будет близко к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе. Собственно, об этом эффекте я уже подробно рассказывал на уроке о [статистической вероятности](#).

Теперь вспомним нашу гипотетическую игру:

U	-5	2,5	10
	0,5	0,4	0,1

Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру? ...у кого какие впечатления? Так ведь «навскидку» и не скажешь! Но на этот вопрос можно

легко ответить, вычислив математическое ожидание, по сути – *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш:

$M(U) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 = -5 \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,1 = -2,5 + 1 + 1 = -0,5$, таким образом, математическое ожидание данной игры **проигрышно**.

Не верь впечатлениям – верь цифрам!

Да, здесь можно выиграть 10 и даже 20-30 раз подряд, но на длинной дистанции нас ждёт неминуемое разорение. И я бы не советовал вам играть в такие игры :) Ну, может, только ради развлечения.

Из всего вышесказанного следует, что математическое ожидание – это уже НЕ СЛУЧАЙНАЯ величина.

Творческое задание для самостоятельного исследования:

Пример 4

Мистер X играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины X – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько в среднем проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

Справка: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино

Существует много других систем игры в рулетку, для которых можно составить свои таблицы вероятностей. Но это тот случай, когда нам не нужны никакие законы распределения и таблицы, ибо доподлинно установлено, что математическое ожидание игрока будет точно таким же. От системы к системе меняется лишь дисперсия, о которой мы узнаем во 2-й части урока.

Но прежде будет полезно размять пальцы на клавишах калькулятора:

Пример 5

Случайная величина X задана своим законом распределения вероятностей:

X	-1	0	x_3	5
	0,3	0,2	0,1	0,4

Найти x_3 , если известно, что $M(X) = 1,9$. Выполнить проверку.

Есть?

Тогда переходим к изучению дисперсии дискретной случайной величины, и по возможности, **ПРЯМО СЕЙЧАС!!** – чтобы не потерять нить темы.

Решения и ответы:

Пример 3. Решение: по условию $p = 0,7$ – вероятность попадания в мишень. Тогда:

$q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3$ – вероятность промаха.

Составим W – закон распределения попаданий при двух выстрелах:

$w_1 = 0$ – ни одного попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p_1 = qq = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$$

$w_2 = 1$ – одно попадание. По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий:

$$p_2 = pq + qp = 0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,21 + 0,21 = 0,42$$

$w_3 = 2$ – два попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p_3 = pp = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$$

Проверка: $0,09 + 0,42 + 0,49 = 1$

Ответ:

W	0	1	2
	0,09	0,42	0,49

Примечание: можно было использовать обозначения $w_0, w_1, w_2, p_0, p_1, p_2$ – это не принципиально.

Пример 4. Решение: игрок выигрывает 100 рублей в 18 случаях из 37, и поэтому закон распределения его выигрыша имеет следующий вид:

X	-100	100
	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = -100 \cdot \frac{19}{37} + 100 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{1900}{37} + \frac{1800}{37} = -\frac{100}{37} \approx -2,70$$

Таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.

Пример 5. Решение: по определению математического ожидания:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$$

$$1,9 = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 + x_3 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,4$$

поменяем части местами и проведём упрощения:

$$-0,3 + 0 + 0,1x_3 + 2 = 1,9$$

$$0,1x_3 + 1,7 = 1,9$$

$$0,1x_3 = 1,9 - 1,7$$

$$0,1x_3 = 0,2$$

таким образом:

$$x_3 = \frac{0,2}{0,1} = \frac{2}{1} = 2$$

Выполним проверку:

$$\begin{aligned} M(X) &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,5 = \\ &= -0,3 + 0 + 0,2 + 2 = 1,9, \text{ что и требовалось проверить.} \end{aligned}$$

Ответ: $x_3 = 2$

Случайные величины. Дискретная случайная величина. Математическое ожидание

Второй раздел по [теории вероятностей](#) посвящён **случайным величинам**, которые незримо сопровождали нас буквально в каждой статье по теме. И настал момент чётко сформулировать, что же это такое:

Случайной называют **величину**, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через X, Y, Z *, а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, x_1, x_2, x_3 .

* Иногда используют U, V, W , а также греческие буквы

Пример встретился нам на [первом же уроке по теории вероятностей](#), где мы фактически рассмотрели следующую случайную величину:

X – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только одна** грань, какая именно – не предсказать (*фокусы не рассматриваем*); при этом случайная величина X может принять одно из следующих значений:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 6.$$

Пример из статьи о [Статистическом определении вероятности](#):

Y – количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 3, \quad \dots, y_9 = 9$, либо $y_{10} = 10$ мальчиков – **один и только один** из перечисленных вариантов.

И, дабы соблюсти форму, немного физкультуры:

Z – дальность прыжка в длину (*в некоторых единицах*).

Её не в состоянии предугадать даже мастер спорта :)

Тем не менее, ваши гипотезы?

Коль скоро речь идёт о [множестве действительных чисел](#), то случайная величина Z может принять *несчётно много* значений из некоторого числового промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы:**

1) Дискретная (*прерывная*) случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно*.

...нарисовались непонятные термины? Срочно повторяем [основы алгебры](#)!

2) Непрерывная случайная величина – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Примечание: в учебной литературе популярны аббревиатуры ДСВ и НСВ

Сначала разберём дискретную случайную величину, затем – [непрерывную](#).

Поехали:

Закон распределения дискретной случайной величины

– это *соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Довольно часто встречается термин **ряд распределения**, но в некоторых ситуациях он звучит двусмысленно, и поэтому я буду придерживаться «закона».

А теперь **очень важный момент**: поскольку случайная

величина X **обязательно** примет **одно из значений** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то соответствующие события образуют [полную группу](#) и сумма вероятностей их наступления равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

или, если записать свёрнуто:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Так, например, закон распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:

X	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Без комментариев.

Возможно, у вас сложилось впечатление, что дискретная случайная величина может принимать только «хорошие» целые значения. Развеем иллюзию – они могут быть любыми:

Пример 1

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

U	-5	2,5	10
	0,5	p_2	0,1

Найти p_2

...наверное, вы давно мечтали о таких задачах :) Открою секрет – я тоже. В особенности после того, как завершил работу над [теорией поля](#).

Решение: так как случайная величина U может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют *полную группу*, а значит, сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Разоблачаем «партизана»:

$$0,5 + p_2 + 0,1 = 1$$

$$p_2 + 0,6 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - 0,6 \text{ – таким образом, вероятность}$$

выигрыша $u_2 = 2,5$ условных единиц составляет 0,4.

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0,5 + 0,4 + 0,1 = 1$, в чём и требовалось убедиться.

Ответ: $p_2 = 0,4$

Не редкость, когда закон распределения требуется составить самостоятельно. Для этого используют [классическое определение вероятности](#), [теоремы умножения / сложения вероятностей событий](#) и другие фишки [тервера](#):

Пример 2

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей.

Составить закон распределения случайной величины V – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

Решение: как вы заметили, значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно $v_1 = 0$ рублей.

Всего таковых билетов $50 - 12 = 38$, и по [классическому определению](#):

$$p_1 = \frac{38}{50} = 0,76 \text{ – вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.}$$

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша $v_2 = 100$ рублей составляет:

$$p_2 = \frac{10}{50} = 0,2$$

И для $v_3 = 1000$:

$$p_3 = \frac{2}{50} = 0,04$$

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0,76 + 0,2 + 0,04 = 1$ – и это особенно приятный момент таких заданий!

Ответ: искомый закон распределения выигрыша:

V	0	100	1000
	0,76	0,2	0,04

Следующее задание для самостоятельного решения:

Пример 3

Вероятность того, что стрелок поразит мишень, равна $p = 0,7$. Составить закон распределения случайной величины W – количества попаданий после 2 выстрелов.

...я знал, что вы по нему соскучились :) Вспоминаем [теоремы умножения и сложения](#). Решение и ответ в конце урока.

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно (а иногда и полезнее) знать лишь некоторые её **числовые характеристики**.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Говоря простым языком, это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина X принимает

значения $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ соответственно. Тогда математическое ожидание $M(X)$ данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

или в свёрнутом виде:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины X – количества выпавших на игральном кубике очков:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5 \text{ очка}$$

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то *среднее значение* выпавших очков будет близко к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе. Собственно, об этом эффекте я уже подробно рассказывал на уроке о [статистической вероятности](#).

Теперь вспомним нашу гипотетическую игру:

U	-5	2,5	10
	0,5	0,4	0,1

Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру? ...у кого какие впечатления? Так ведь «навскидку» и не скажешь! Но на этот вопрос можно

легко ответить, вычислив математическое ожидание, по сути – *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш:

$M(U) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 = -5 \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,1 = -2,5 + 1 + 1 = -0,5$, таким образом, математическое ожидание данной игры **проигрышно**.

Не верь впечатлениям – верь цифрам!

Да, здесь можно выиграть 10 и даже 20-30 раз подряд, но на длинной дистанции нас ждёт неминуемое разорение. И я бы не советовал вам играть в такие игры :) Ну, может, только ради развлечения.

Из всего вышесказанного следует, что математическое ожидание – это уже НЕ СЛУЧАЙНАЯ величина.

Творческое задание для самостоятельного исследования:

Пример 4

Мистер X играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины X – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько в среднем проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

Справка: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино

Существует много других систем игры в рулетку, для которых можно составить свои таблицы вероятностей. Но это тот случай, когда нам не нужны никакие законы распределения и таблицы, ибо доподлинно установлено, что математическое ожидание игрока будет точно таким же. От системы к системе меняется лишь дисперсия, о которой мы узнаем во 2-й части урока.

Но прежде будет полезно размять пальцы на клавишах калькулятора:

Пример 5

Случайная величина X задана своим законом распределения вероятностей:

X	-1	0	x_3	5
	0,3	0,2	0,1	0,4

Найти x_3 , если известно, что $M(X) = 1,9$. Выполнить проверку.

Есть?

Тогда переходим к изучению дисперсии дискретной случайной величины, и по возможности, **ПРЯМО СЕЙЧАС!!** – чтобы не потерять нить темы.

Решения и ответы:

Пример 3. Решение: по условию $p = 0,7$ – вероятность попадания в мишень. Тогда:

$q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3$ – вероятность промаха.

Составим W – закон распределения попаданий при двух выстрелах:

$w_1 = 0$ – ни одного попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p_1 = qq = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$$

$w_2 = 1$ – одно попадание. По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий:

$$p_2 = pq + qp = 0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,21 + 0,21 = 0,42$$

$w_3 = 2$ – два попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p_3 = pp = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$$

Проверка: $0,09 + 0,42 + 0,49 = 1$

Ответ:

W	0	1	2
	0,09	0,42	0,49

Примечание: можно было использовать обозначения $w_0, w_1, w_2, p_0, p_1, p_2$ – это не принципиально.

Пример 4. Решение: игрок выигрывает 100 рублей в 18 случаях из 37, и поэтому закон распределения его выигрыша имеет следующий вид:

	-100	100
X	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = -100 \cdot \frac{19}{37} + 100 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{1900}{37} + \frac{1800}{37} = -\frac{100}{37} \approx -2,70$$

Таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.

Пример 5. Решение: по определению математического ожидания:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$$

$$1,9 = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 + x_3 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,4$$

поменяем части местами и проведём упрощения:

$$-0,3 + 0 + 0,1x_3 + 2 = 1,9$$

$$0,1x_3 + 1,7 = 1,9$$

$$0,1x_3 = 1,9 - 1,7$$

$$0,1x_3 = 0,2$$

таким образом:

$$x_3 = \frac{0,2}{0,1} = \frac{2}{1} = 2$$

Выполним проверку:

$$\begin{aligned} M(X) &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,5 = \\ &= -0,3 + 0 + 0,2 + 2 = 1,9, \text{ что и требовалось проверить.} \end{aligned}$$

Ответ: $x_3 = 2$

