https://pnu.edu.ru/media/filer_public/ef/e9/efe99428-42d9-41a2-bc89-0541f2c34570/biderman_dsv.pdf

http://mathprofi.ru/binomialnoe_raspredelenie_veroyatnostei.html

Биномиальное распределение вероятностей

Или биномиальный закон распределения вероятностей. Исходя из моих наблюдений и личной статистики – это наиболее распространённый вид **дискретного распределения**, с которым мы уже встречались добрый десяток раз.

Я буду формулировать задачу в общем виде и попутно приводить конкретный пример:

Пусть проводится n **независимых испытаний** *(не обязательно повторных)*, в каждом из которых **случайное событие** A может появиться с вероятностью p. Тогда **случайная величина** X *– число появлений события A в данной серии испытаний*, имеет биномиальное распределение.

Совершенно понятно, что эта случайная величина может принять одно из следующих значений: $x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad \dots, \quad x_{n-1} = n-1, \quad x_n = n$.

Например: монета подбрасывается 5 раз. Тогда случайная величина X *– количество появлений орла* распределена по биномиальному закону. Орёл обязательно выпадет:

или $x_0 = 0$ раз, или $x_1 = 1$, или $x_2 = 2$, или $x_3 = 3$, или $x_4 = 4$, или $x_5 = 5$ раз.

Как вы догадались, соответствующие вероятности определяются **формулой Бернулли**:

$p_i = P_n^{x_i} = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$, где:

n – количество независимых испытаний;
p – вероятность появления события A в каждом испытании;
$q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в каждом испытании;
$x_i = \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\}$ – сколько раз может появиться событие A в данной серии испытаний (список всех возможных значений).

Сведём этот закон распределения в таблицу:

X	x_i	0	1	2	$\dots$	$n-1$	n
	p_i	$C_n^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\dots$	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	$C_n^n p^n$

Вероятности p_i представляют собой члены **бинома Ньютона**, благодаря чему распределение и получило своё название. По формуле бинома:

$C_n^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^n p^n = (q+p)^n = 1^n = 1$, что мы и ожидали увидеть.

В нашем примере с монеткой:

$p_0 = P_5^0 = C_5^0 p^0 q^{5-0} = (0,5)^5 = 0,03125$ – вероятность того, что в 5 испытаниях орёл не выпадет вообще ($x_0 = 0$);

$p_1 = P_5^1 = C_5^1 p^1 q^{5-1} = 5 \cdot 0,5 \cdot (0,5)^4 = 0,15625$ – вероятность того, что в 5 испытаниях орёл выпадет ровно $x_1 = 1$ раз;

$p_2 = P_5^2 = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^3 = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot (0,5)^5 = 0,3125$ – вероятность того, что в 5 испытаниях орёл выпадет ровно $x_2 = 2$ раза;

$p_3 = P_5^3 = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot (0,5)^3 \cdot (0,5)^2 = 0,3125$ – … ровно $x_3 = 3$ раза;

$p_4 = P_5^4 = C_5^4 p^4 q^{5-4} = 5 \cdot (0,5)^4 \cdot 0,5 = 0,15625$ – … ровно $x_4 = 4$ раза;

$p_5 = P_5^5 = C_5^5 p^5 q^{5-5} = (0,5)^5 = 0,03125$ – … ровно $x_5 = 5$ раз.

Таким образом, закон распределения числа выпавших орлов:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Контроль: $0,03125 + 0,15625 + 0,3125 + 0,3125 + 0,15625 + 0,03125 = 1$

Легко видеть, что нахождение биномиального ряда распределения – есть занятие муторное, и это хорошо, если он содержит 3-4-5-6 значений. А ведь немало задач, где требуется рассчитать 8-10, а то и бОльшее количество вероятностей!

Поэтому вычисления целесообразно автоматизировать в Экселе с помощью его стандартной функции:

=БИНОМРАСП(m; n; p; 0), где m количество успехов в n испытаниях, а p – вероятность успеха в каждом испытании.

Именно так реализован *Пункт 3* моего **расчётного макета** по ТерВеру, ну и особо крутая плюшка – это *Пункт 6*, в котором биномиальное распределение получается автоматически!

Однако на практике решение нужно расписывать подробно, да и техника не всегда бывает под рукой. В этой связи **обязательно** прорешайте хотя бы 2-3 типовых задачи и постукайте пальцами по клавишам микрокалькулятора.

Начинаем:

Задача

Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в цель при четырех выстрелах. Вычислить $M(X)$ и $D(X)$. Построить многоугольник и функцию распределения. Найти $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$.

…таких задач очень много – составить **закон распределения вероятностей** и найти всё-всё-всё. Или почти всё. Или что-то ещё – зависит от фантазии составителя :)

Решение: по существу, текст условия совпадает с *Задачей* статьи о **геометрическом распределении**, но есть одно принципиальное отличие – здесь другая случайная величина. А именно, ~~под страхом расстрела~~ совершается серия из $n = 4$ **и строго из 4** выстрелов, вероятность попадания *в каждом* из которых составляет $p = 0{,}6$.

Очевидно, что испытания **независимы**, и случайная величина X распределена по биномиальному закону.

Составим ряд распределения данной случайной величины.
Используем **формулу Бернулли**:
$p_i = P_n^{x_i} = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$ для $x_i = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ – всех возможных результатов рассматриваемой серии.

На этом шаге я сразу забью $n = 4,\ p = 0{,}6$ в свой **расчётный макет** *(Пункт 6)*, чтобы контролировать правильность каждого пункта. Для удобства их можно нумеровать:

0) $x_0 = 0$
$p_0 = P_4^0 = C_4^0 \cdot (0{,}6)^0 \cdot (0{,}4)^4 = (0{,}4)^4 = 0{,}0256$ – вероятность того, что в 4 выстрелах не будет попаданий;

1) $x_1 = 1$
$p_1 = P_4^1 = C_4^1 \cdot (0{,}6)^1 \cdot (0{,}4)^3 = 4 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}4)^3 = 0{,}1536$ – вероятность того, что в 4 выстрелах будет ровно 1 попадание;

2) $x_2 = 2$
$p_2 = P_4^2 = C_4^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^2 = 6 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}16 = 0{,}3456$ – … ровно 2 попадания;

3) $x_3 = 3$
$p_3 = P_4^3 = C_4^3 \cdot (0{,}6)^3 \cdot (0{,}4)^1 = 4 \cdot (0{,}6)^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}3456$ – … ровно 3 попадания;

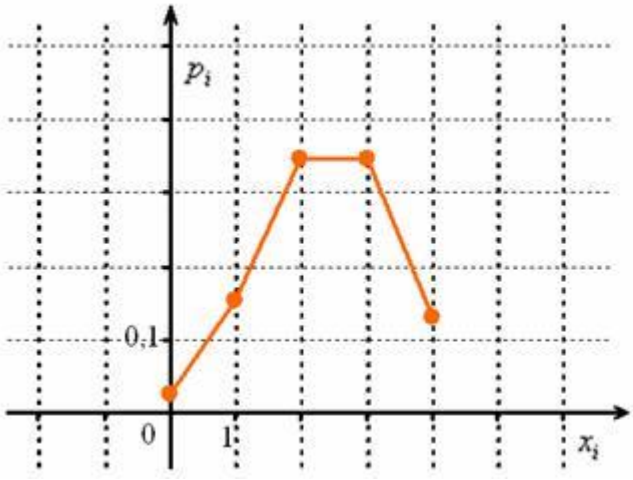
4) $x_4 = 4$
$p_4 = P_4^4 = C_4^4 \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^0 = (0{,}6)^4 = 0{,}1296$ – … ровно 4 попадания.

Таким образом, искомый закон распределения:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

Проверка: $0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}3456 + 0{,}3456 + 0{,}1296 = 1$, ч.т.п.

Пока таблица не ушла из поля зрения, построим **многоугольник распределения**:



Вычислим **математическое ожидание** и **дисперсию**. И тут есть отличная новость – для биномиального распределения можно не использовать **общий алгоритм** расчёта этих числовых характеристик – по той причине, что существуют готовые формулы:

$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$ – среднеожидаемое количество попаданий;

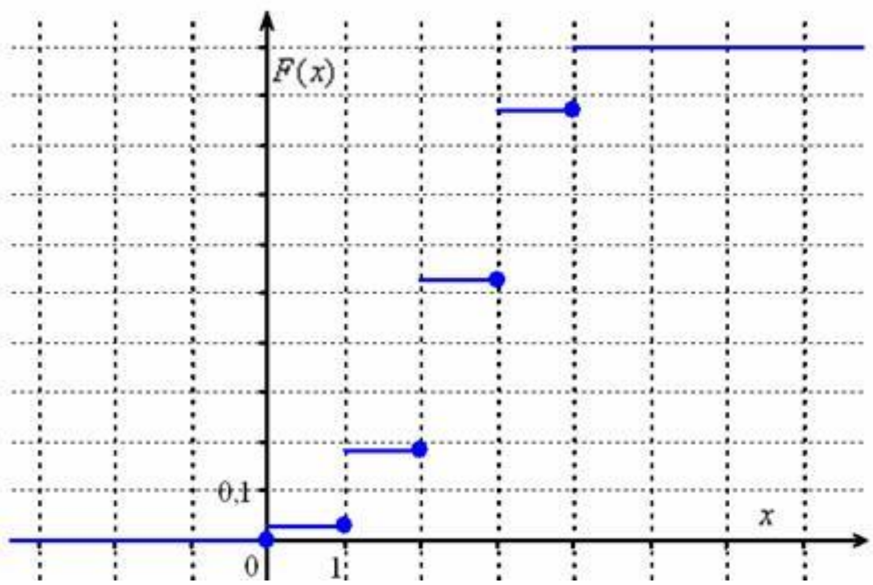
$D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}96$ – *рассеяние* количества попаданий относительно матожидания.

Всегда бы так!

Составим **функцию распределения вероятностей**:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0 \\ 0{,}0256, & \text{если} \quad 0 < x \le 1 \\ 0{,}1792, & \text{если} \quad 1 < x \le 2 \\ 0{,}5248, & \text{если} \quad 2 < x \le 3 \\ 0{,}8704, & \text{если} \quad 3 < x \le 4 \\ 1, & \text{если} \quad x > 4 \end{cases}$$

Я не буду вновь останавливаться на алгоритме её построения, и если что-то не понятно, то смотрите по ссылке выше. Раз ступенька, два ступенька – будет график:



Напоминаю, что в статье о **функции распределения** можно разыскать программу, которая строит чертежи автоматически.

Найдём $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$ – вероятность того, что значение случайной величины X отклонится от своего **математического ожидания** не более чем на одно **среднее квадратическое отклонение**.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$

и искомая вероятность:

$$P(|X - M(X)| < \sigma(X)) = P(-\sigma(X) < X - M(X) < \sigma(X)) = P(M(X) - \sigma(X) < X < M(X) + \sigma(X)) =$$
$$= P\left(2{,}4 - \sqrt{0{,}96} < X < 2{,}4 + \sqrt{0{,}96}\right) = F\left(2{,}4 + \sqrt{0{,}96}\right) - F\left(2{,}4 - \sqrt{0{,}96}\right) = 0{,}8704 - 0{,}1792 = 0{,}6912$$

(в чём смысл этого пункта решения?)

Готово.

Как вариант, в разобранной задаче может быть предложена другая случайная величина: не количество попаданий, а X – количество промахов. Нетрудно догадаться, что в этом случае вероятности «развернутся наоборот» $(p = 0{,}4,\ q = 0{,}6)$, и числовые характеристики с графиками будут другими.

БУДЬТЕ ВНИМАТЕЛЬНЫ!

Дополнительные и многочисленные задания по теме можно найти в **pdf-сборнике**, и как я рекомендовал выше – непременно прорешайте пару-тройку задач вручную! Как говорится, автопилот хорошо, но без ручного управления – финиш.

На очереди **распределение Пуассона** и **гипергеометрическое распределение вероятностей**.

http://mathprofi.ru/raspredelenie_i_formula_puassona.html

Распределение и формула Пуассона

В данной статье мы рассмотрим ещё одно **дискретное распределение**, которое получило широкое распространение на практике. Не успел я открыть курс по **теории вероятностей**, как сразу стали поступать запросы: *«Где Пуассон? Где задачи на формулу Пуассона?» и т.п.* И поэтому я начну с *частного применения* распределения Пуассона – ввиду большой востребованности материала.

Задача до ~~боли~~ эйфории знакома:

– проводится n **независимых испытаний**, в каждом из которых **случайное событие** A может появиться с вероятностью p. Требуется найти вероятность того, что в данной серии испытаний событие A появится ровно m раз.

Наверное, вам уже снится **формула Бернулли**:)

$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

тем более, на уроке о **биномиальном распределении вероятностей** мы разобрали ситуацию по косточкам.

В том случае, если количество испытаний n велико *(сотни и тысячи)*, эту вероятность обычно рассчитывают приближённо – с помощью **локальной теоремы Лапласа**: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Однако и тут есть «слабое звено» – теорема Лапласа начинает серьёзно барахлить (давать большую погрешность), если вероятность p меньше, чем 0,1 (и чем меньше, тем всё хуже). Поэтому здесь используют другой метод, и именно распределение Пуассона.

Итак, **если количество испытаний n достаточно велико, а вероятность p появления события A в отдельно взятом испытании весьма мала** (0,05-0,1 и меньше), то вероятность того, что в данной серии испытаний событие A появится ровно m раз, можно приближенно вычислить **по формуле Пуассона**:

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$

Напоминаю, что **ноль факториал** $0! = 1$, а значит, формула имеет смысл и для $m = 0$.

Вместо «лямбды» также используют букву «а».

Пример 1

В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажет ровно 1 замок.

Утопичная, конечно, задача, но что делать – **решаем**:)

В данном случае количество «испытаний» $n = 10000$ велико, а вероятность «успеха» в каждом из них – мала: $p = 0,0002$, поэтому используем формулу Пуассона:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

Вычислим:
$\lambda = np = 10000 \cdot 0,0002 = 2$ – по существу, это *среднеожидаемое* количество вышедших из строя замков.

Таким образом:
$P_1 \approx \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} = 2e^{-2} \approx 0,2707$ – вероятность того, что за месяц из строя выйдет ровно $m = 1$ один замок (из 10 тысяч).

Ответ: $\approx 0,2707$

С технической точки зрения этот результат можно получить несколькими способами, расскажу о них в историческом ракурсе:

1) С помощью специальной таблицы, которая до сих пор встречается во многих книгах по терверу. В данную таблицу сведены различные значения λ, m и соответствующие им вероятности. Табулирование обусловлено тем, что в своё время не существовало бытовых калькуляторов, на которых можно было бы подсчитать значения экспоненциальной функции. Отсюда, кстати, идёт традиция **округлять вычисления до 4 знаков после запятой** – как в стандартной таблице.

2) С помощью прямого вычисления на микрокалькуляторе (прогресс!).

3) С помощью стандартной экселевской функции:
=ПУАССОН(m; лямбда; 0)
в данной задаче вбиваем в любую ячейку Экселя *=ПУАССОН(1; 2; 0)* и жмём *Enter*.

Следует отметить, что развитие вычислительной техники фактически отправило в историю **методы Лапласа**, да и рассматриваемый метод тоже – по той причине, что ответ легко вычислить более точно по формуле Бернулли:
$P_{10000}^1 \approx 0,2706705646685$

Здесь я использовал функцию *БИНОМРАСП*, о которой неоднократно упоминал ранее.

Но формула Пуассона, тем не менее, даёт очень крутое приближение:
$P_1 \approx 0,2706705664732$ – с погрешностью только на 9 знаке после запятой!

Впрочем, это всё лирика, решать-то всё равно нужно по формуле Пуассона:

Пример 2

Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено: а) ни одного изделия, б) ровно три изделия, в) более трех изделий.

Классика жанра.

Решение: используем формулу Пуассона:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

В данном случае:

$\lambda = np = 500 \cdot 0{,}003 = 1{,}5$ – среднеожидаемое количество повреждённых изделий

а) $m = 0$

$P_0 \approx \frac{1{,}5^0}{0!} \cdot e^{-1{,}5} = e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231$ – вероятность того, что все изделия дойдут в целости и сохранности. Ничего не украдут, одним словом :)

б) $m = 3$

$P_3 \approx \frac{1{,}5^3}{3!} \cdot e^{-1{,}5} \approx 0{,}1255$ – вероятность того, что в пути будут повреждены ровно 3 изделия из 500.

в) $m > 3$

А тут всё немножко хитрее. Сначала найдём $P(m \le 3)$ – вероятность того, что в пути повредятся не более трёх изделий. По **теореме сложения вероятностей несовместных событий**:

$$P(m \le 3) \approx P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1{,}5^0}{0!} \cdot e^{-1{,}5} + \frac{1{,}5^1}{1!} \cdot e^{-1{,}5} + \frac{1{,}5^2}{2!} \cdot e^{-1{,}5} + \frac{1{,}5^3}{3!} \cdot e^{-1{,}5} \approx$$

$$\approx 0{,}2231 + 0{,}3347 + 0{,}2510 + 0{,}1255 = 0{,}9344$$

Само собой, ручками это считать надоест, и поэтому я добавил в свой **расчётный макет** автоматическое построение распределения Пуассона *(см. Пункт 7)* – пользуйтесь на здоровье.

По **теореме сложения вероятностей противоположных событий**:

$P(m > 3) = 1 - P(m \le 3) \approx 1 - 0{,}9344 = 0{,}0656$ – вероятность того, что при доставке будет повреждено более 3 изделий.

Ответ: а) $\approx 0{,}2231$, б) $\approx 0{,}1255$, в) $\approx 0{,}0656$

Самостоятельно:

<u>Пример 3</u>

Вероятность изготовления бракованных деталей при их массовом производстве равна $p = 0{,}001$. Определить вероятность того, что в партии из 800 деталей будет: а) ровно 2 бракованные, б) не более двух.

Решение и ответ в конце урока.

Встречаются и другие формулировки условия. Так, в предложенной задаче может идти речь о том, что производственный брак составляет 0,1% или *«в среднем 1 деталь на каждую тысячу»*. Бывает и дано готовое значение «лямбда», например: *«В стандартной партии из 800 деталей брак в среднем составляет 0,8 деталей. Найти вероятность того, что в очередной партии…»*.

В этой связи ни в коем случае не отключаем голову – даже в таких простых примерах!

А теперь о самом **распределении Пуассона**. **Случайная величина** X, распределённая по этому закону, принимает бесконечное и **счётное** количество значений $x_i = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, вероятности появления которых определяются формулой:

$$P_{x_i} = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

Или, если расписать подробно:

X	x_i	0	1	2	3	$\ldots$	n	$\ldots$
	p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$	$\ldots$

Вспоминая **разложение экспоненты в ряд**, легко убедиться, что:

$$\sum p_i = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} + \ldots =$$

$$= e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} + \ldots\right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

В теории установлено, что **математическое ожидание** пуассоновской случайной величины равно $M(X) = \lambda$ и **дисперсия** – тому же самому значению: $D(X) = \lambda$.

Обратите внимание, что во всех вышеприведённых заданиях мы лишь ПОЛЬЗОВАЛИСЬ распределением Пуассона для приближенного расчёта вероятностей, в то время как ТОЧНЫЕ значения следовало находить по **формуле Бернулли**, т.е., там имело место **биномиальное распределение**.

И следующие две задачи принципиально отличаются от предыдущих:

Пример 4

Случайная величина X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Найти вероятность того, что данная случайная величина X примет значение, меньшее, чем ее математическое ожидание.

Отличие состоит в том, что здесь речь идёт ИМЕННО о распределении Пуассона.

Решение: случайная величина X принимает значения $x_i = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ с вероятностями:

$$P_{x_i} = \frac{a^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-a}$$

По условию, $M(X) = a = 3$, и тут всё просто: событие $X < 3$ состоит в трёх **несовместных исходах**:

$P(X<3)=P_0+P_1+P_2=\frac{3^0}{0!}\cdot e^{-3}+\frac{3^1}{1!}\cdot e^{-3}+\frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3}\approx 0{,}0498+0{,}1494+0{,}2240=0{,}4232$ вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем ее математическое ожидание.

Ответ: $\approx 0{,}4232$

Аналогичная задача на понимание:

Пример 5

Случайная величина X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $a=1$. Найти вероятность того, что данная случайная величина примет положительное значение.

Решение и ответ в конце урока.

Помимо *приближения* **биномиального распределения** (Примеры 1-3), распределение Пуассона нашло широкое применение в **теории массового обслуживания** для вероятностной характеристики *простейшего* потока событий. Постараюсь быть лаконичным:

Пусть в некоторую систему поступают заявки (телефонные звонки, приходящие клиенты и т.д.). Поток заявок называют *простейшим*, если он удовлетворяет условиям *стационарности*, *отсутствия последствий* и *ординарности*. Стационарность подразумевает то, что интенсивность заявок постоянна и не зависит от времени суток, дня недели или других временнЫх рамок. Иными словами, не бывает «часа пик» и не бывает «мёртвых часов». Отсутствие последствий означает, что вероятность появления новых заявок не зависит от «предыстории», т.е. нет такого, что «одна бабка рассказала» и другие «набежали» (или наоборот, разбежались). И, наконец, свойство ординарности характеризуется тем, что за *достаточно малый* промежуток времени ***практически невозможно*** появление двух или бОльшего количества заявок. «Две старушки в дверь?» – нет уж, увольте~~, рубить удобнее по порядку~~.

Итак, пусть в некоторую систему поступает простейший поток заявок со средней интенсивностью λ заявок в некоторую единицу времени *(минуту, час, день или в любую другую)*. Тогда вероятность того, что за данный промежуток времени, в систему поступит ровно m заявок, равна:

$$P_m=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$$

Пример 6

Звонки в диспетчерскую такси представляет собой простейший пуассоновский поток со средней интенсивностью 30 вызовов в час. Найти вероятность того, что: а) за 1 мин. поступит 2-3 вызова, б) в течение пяти минут будет хотя бы один звонок.

Решение: используем формулу Пуассона:

$$P_m=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$$

а) Учитывая стационарность потока, вычислим среднее количество вызовов за 1 минуту:

$\lambda = \frac{30}{60} = 0{,}5$ вызова – в среднем за одну минуту.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(2 \le m \le 3) = P_2 + P_3 = \frac{0{,}5^2}{2!} \cdot e^{-0{,}5} + \frac{0{,}5^3}{3!} \cdot e^{-0{,}5} \approx 0{,}0758 + 0{,}0126 = 0{,}0885$ – вероятность того, что за 1 минуту в диспетчерскую поступит 2-3 вызова.

б) Вычислим среднее количество вызов за пять минут:

$\lambda = \frac{30}{60} \cdot 5 = 2{,}5$

По формуле Пуассона:

$P_0 = \frac{2{,}5^0}{0!} \cdot e^{-2{,}5} \approx 0{,}0821$ – вероятность того, что в течение 5 минут не будет ни одного звонка.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(m \ge 1) = 1 - P_0 \approx 1 - 0{,}0821 = 0{,}9179$ – вероятность того, что в течение 5 минут будет хотя бы один вызов.

Ответ: а) $\approx 0{,}0885$, б) $\approx 0{,}9179$

Заметьте, что, несмотря на *конечное* количество возможных звонков (а оно в принципе конечно), здесь имеет место именно распределение Пуассона, а не какое-то другое.

Для самостоятельного решения:

Пример 7

Среднее число автомобилей, проходящих таможенный досмотр в течение часа, равно 3. Найти вероятность того, что: а) за 2 часа пройдут досмотр от 7 до 10 автомобилей; б) за полчаса успеет пройти досмотр только 1 автомобиль.

Решение и ответ в конце урока.

Наверное, многие знают, что теория массового обслуживания – это обширный и очень интересный раздел прикладной математики, и сейчас мы познакомились с простейшей его задачей.

Дополнительные примеры на распределение и формулу Пуассона можно найти в **тематической pdf-книге**, и я предлагаю вам ознакомиться с ещё одной популярной вещью – **Гипергеометрическим распределением вероятностей**.

Приятного и полезного чтения!

Решения и ответы:

Пример 3. ***Решение****: используем формулу Пуассона:*

$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$*, в данном случае:*

$\lambda = np = 0{,}001 \cdot 800 = 0{,}8$

а) $P_2 = \frac{0,8^2}{2!} \cdot e^{-0,8} \approx 0,1438$ – *вероятность того, что в данной партии окажется ровно 2 бракованные детали.*

б) По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(m \le 2) \approx P_0 + P_1 + P_2 = \frac{0,8^0}{0!} \cdot e^{-0,8} + \frac{0,8^1}{1!} \cdot e^{-0,8} + \frac{0,8^2}{2!} \cdot e^{-0,8} \approx$$

$\approx 0,4493 + 0,3595 + 0,1438 = 0,9526$ – *вероятность того, что в данной партии окажется не более 2 бракованных изделий.*

***Ответ**: а)* $\approx 0,1438$*, б)* $\approx 0,9526$

Пример 5. ***Решение**: случайная величина* X *принимает значения* $x_i = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ *с вероятностями* $P_{x_i} = \frac{a^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-a}$*. По условию,* $a = 1$*. Найдём вероятность того, что случайная величина примет нулевое значение:*

$$P_0 = \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} \approx 0,3679$$

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(X > 1) = 1 - P_0 \approx 1 - 0,3679 = 0,6321$ – *вероятность того, что случайная величина примет положительное значение*

***Ответ**:* $\approx 0,6321$

Пример 7. ***Решение**: предполагая поток простым, используем формулу Пуассона:*

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

а) Вычислим $\lambda = 2 \cdot 3 = 6$ – *среднее количество автомобилей, проходящих таможенный досмотр, в течение 2 часов.*

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(7 \le m \le 10) = P_7 + P_8 + P_9 + P_{10} = \frac{6^7}{7!} \cdot e^{-6} + \frac{6^8}{8!} \cdot e^{-6} + \frac{6^9}{9!} \cdot e^{-6} + \frac{6^{10}}{10!} \cdot e^{-6} \approx$$

$\approx 0,1377 + 0,1033 + 0,0688 + 0,0413 = 0,3511$ – *вероятность того, что за 2 часа досмотр пройдут от 7 до 10 автомобилей*

б) Вычислим $\lambda = 0,5 \cdot 3 = 1,5$ – *среднее количество автомобилей, проходящих досмотр, за 1/2 часа.*

По формуле Пуассона:

$P_1 = \frac{1,5^1}{1!} \cdot e^{-1,5} \approx 0,3347$ – *вероятность того, что за полчаса таможенный досмотр пройдёт только один автомобиль.*

***Ответ**: а)* $\approx 0,3511$*, б)* $\approx 0,3347$