Добрый день,

Законспектируйте новый материал и *приготовьтесь к опросу.*

https://studfile.net/preview/2003570/

1. Основные определения

Логика предикатов представляет собой развитие логики высказываний. Она содержит в себе всю логику высказываний, т.е. элементарные высказывания, рассматриваемые как величины, которые принимают значения И либо Л. Но помимо этого, язык логики предикатов вводит в рассмотрение утверждения, отнесенные к предметам, т.е. производится более детальный анализ предложений. Рассмотрение логики предикатов вызвано тем, что логика высказываний не позволяет моделировать рассуждения всех видов, в частности рассуждении с использованием понятии «каждый», «некоторый». Отметим, что логика предикатов тоже не охватывает всевозможных случаев рассуждений, например, когда нужно исследовать рассуждения, истинность которых зависит от времени или вводятся понятия «должно быть» и «может быть» и т.п.

Пусть *M* - некоторое множество предметов, $a_1, a_2, \ldots$ - какие-то определенные предметы (элементы) из этого множества. Тогда через $A(a_1)$ будем обозначать некоторое высказывание о предмете a_1, а через $A(a_2)$ - то же высказывание о предмете a_2. Например, если *M* есть множество всех натуральных чисел и a_1=3, a_2=8, то $A(a_1)$ может обозначать высказывание "3-простое число", тогда $A(a_2)$ будет обозначать "8-простое число".

Как и в логике высказываний, будем рассматривать эти высказывания только с той точки зрения, что они представляют либо истину, либо ложь, обозначаемые соответственно *И* и *Л*. При этом значения высказывания $A(a_1)$ и $A(a_2)$ могут быть разными или нет в зависимости от выбранных предметов a_1 и a_2. Следовательно, в отличие от алгебры высказываний будем считать, что значения *И* и *Л* ставятся в соответствие определенным предметам или группам предметов.

Если же не будем фиксировать предмет, например, рассмотрим *A(x)*, где *x* - любой предмет из *M*, то получим некоторое предложение, которое становится высказыванием, когда *x* замещено определенным предметом из *M*. Например, если *M* является множеством всех натуральных чисел, то *A(x)* может обозначать "*x* - простое число". Это предложение становится высказыванием, если *x* заменить числом, например, "3 -простое число", "4-простое число". При этом получаем высказывания, которые истинны, либо ложны. Следовательно, *A(x)* порождает функцию, область определения которой есть множество *M*, а область значений – множество *{И,Л}*. Отметим (еще раз), что *A(x)* становится высказыванием при замене x фиксированным (определенным) предметом из *M.*

Предложения, в которых имеются две и более переменных, будем обозначать, например, *A(x,y)*, *B(x,y,z)* и т. п. При этом *x*, *y*, *z* пробегают все множество *M*, а *A(x,y)*, *B(x,y,z)* при фиксированных *x*, *y*, *z* становятся высказываниями, следовательно, принимают значение *И* либо *Л*. Например, пусть *M* есть множество всех действительных чисел. Рассмотрим предложение: "*x* делится нацело на *y*". Если вместо *x* и *y* подставить конкретные числа из *M*, получится высказывание истинное либо ложное, так, при x=6, y=3 высказывание "6 делится нацело на 3" - истинное, а при x=5, y=7 высказывание "5 делится нацело на 7" - ложно. Рассмотренное предложение "x делится нацело на y" можно обозначить, например, через $C(x,y)$. Такого типа предложения, порождающие функции одного или нескольких переменных, будем считать предикатами.

+Точнее: *предикатом* называется повествовательное предложение об элементах некоторого заданного множества M, которое (предложение) становится высказыванием, если все переменные в нем заменить фиксированными элементами из M; высказывание тоже будем считать предикатом - *нульместным предикатом*. Часто вместо "предикат от n переменных " говорят "n-местный предикат".

2. Кванторы

Введем специальные обозначения. Пусть M - множество, $P(x)$ - определенный на M одноместный предикат. Тогда выражение

$\forall xP(x)$ читается: "для всех x $P(x)$" или "для всех x выполняется $P(x)$", или "для любого x $P(x)$", или "для каждого x $P(x)$". Под выражением "$\forall xP(x)$" будем подразумевать высказывание истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого x из M и ложное - в противном случае. Символ $\forall x$ называется *квантором всеобщности*. Выражение $\exists xP(x)$ читается "существует x такое, что $P(x)$" или "хотя бы для одного x $P(x)$", или "для некоторого (некоторых) x $P(x)$". Под выражением "$\exists xP(x)$" будем подразумевать высказывание, которое истинно, если $P(x)$ принимает значение *И* хотя бы для одного значения переменной $x \in M$, и ложно, если $P(x)$ для всех значений переменной x принимает значение *Л*. Символ $\exists x$ называется *квантором существования*. Квантор $\exists x$ будем называть *двойственным* к квантору $\forall x$, и наоборот.

В литературе применяются и другие обозначения. Так, вместо $\forall xP(x)$ пишут $\Lambda xP(x)$ или $\Lambda_x P(x)$, а вместо $\exists xP(x)$ пишут $VxP(x)$ или $V_x P(x)$, или $ExP(x)$

Введенные обозначения позволяют записывать предложения в символической форме, которая оказывается более удобной для анализа и логических действий над этими предложениями. При символизации языка требуется определенная аккуратность и правильное понимание контекста. В естественном языке часто слово "все" опускается. Так, например, предложение "рыбы дышат жабрами" означает, что все рыбы дышат жабрами или что каждая рыба дышит жабрами. Поэтому при символизации необходимо ввести квантор общности. Таким образом, если положить для множества живых существ, что $R(x)$ означает "x - рыба", а $G(x)$ - "x дышит жабрами", то имеем

$\forall x(R(x) \Rightarrow G(x))$.

Но в то же время не в каждом случае встречающиеся в предложениях слова "все" понимаются как "каждый". Например, предложение "все песчинки образуют кучи песка" не означает, что каждая песчинка образует кучи песка, следовательно, при символизации нельзя употреблять квантор $\forall x$, как это сделано в предыдущем примере.

В языке слово "все" имеет два значения: "любой, каждый" и "все вместе". Квантор $\forall x$ применяется для первого значения.

Из изложенного следует, что "$\forall xP(x)$" служит обозначением для следующих высказываний:

для всех x выполняется (имеет место) $P(x)$;

для каждого x выполняется (имеет место) $P(x)$;

для любого x выполняется (имеет место) $P(x)$;

для произвольного x выполняется (имеет место) $P(x)$;

каково бы ни было x выполняется (имеет место) $P(x)$.

В языке слово "некоторый", так же как и "все", часто опускается. Например, предложение "люди побывали на Луне" означает, что некоторые люди побывали на Луне.

Символическая запись $\exists xP(x)$, как мы знаем, означает, что для некоторых x имеет место $P(x)$, но не исключено, что и для всех x имеет место $P(x)$. В естественном же языке слово "некоторый" иногда употребляют в смысле "не все". Когда говорят "некоторые студенты отличники", подразумевают, что некоторые, но не все студенты отличники. Следовательно, имеется в виду: "неверно, что все студенты отличники, но некоторые - отличники". Тогда, если $C(x)$ означает "x - студент", $O(x)$ означает "x - отличник", то получим:

$$(\neg\forall x(C(x) \Rightarrow O(x)))\ \&\exists\ x(C(x)\&O(x)).$$

Итак, слово "некоторый" имеет два значения: первое - "некоторый, но может быть и все", второе - "некоторый, но не все". Символ $\exists x$ обозначает первое. Следовательно, запись $\exists xP(x)$ служит обозначением для следующих высказываний:

для некоторых x (имеет место) $P(x)$;

существует x, для которого $P(x)$;

найдется x, для которого $P(x)$;

хотя бы для одного x (верно) $P(x)$;

имеется x, для которого $P(x)$.

Рассмотрим следующие часто встречающиеся предложения и справа от них приведем их символическую запись:

(A) все *S* суть *P* - $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$;

(E) ни одно *S* не есть *P* - $\forall x(S(x) \Rightarrow \rceil P(x))$;

(I) некоторые *S* суть *P* - $\exists x(S(x)\&P(x))$;

(O) некоторые *S* не есть *P* - $\exists x(S(x)\&\rceil P(x))$.

Символизация приведенных предложений позволяет записывать в символическом виде довольно сложные выводы, использующие всевозможные комбинации предложений *(A)*-*(O)*.

До сих пор мы рассматривали приписывание кванторов к одноместным предикатам.

Далее рассмотрим приписывание кванторов к многоместным предикатам. Пусть $P(x_1,x_2,...,x_n)$ -n-местный $(n\geq 2)$ предикат, заданный на множестве *M*.

Выражение

$\forall x_i P(x_1,x_2,...,x_n)$, $1 \leq i \leq n$, (1)

является $(n-1)$-местным предикатом, зависящим от (свободных) переменных

$x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$, причем высказывание

$\forall x_i P(a_1,a_2,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n)$

истинно тогда и только тогда, когда для любого значения $a_i \in M$ истинно высказывание $P(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i,a_{i+1},...,a_n)$. (2)

Выражение

$\exists x_i P(x_1,x_2,...,x_n)$, $1 \leq i \leq n$, (3)

является $(n-1)$-местным предикатом, зависящим от (свободных) переменных $x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$, причем высказывание

$\exists x_i A(a_1,a_2,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n)$

истинно тогда и только тогда, когда существует такое значение a_i, $(a_i \in M)$ переменной x_i, для которого высказывание (2) истинно.

Также положим, что если *P* - нульместный предикат (высказывание), то записи $\forall xP$ и $\exists xP$ означают то же, что и *P*.

+Приписывание (навешивание) квантора по переменной *x* связывает переменную *x*. Приписывая к $(n-1)$-местным предикатам (1) и (3) любой квантор по любой из свободных переменных, получим $(n-2)$-местные предикаты (если n=2, то просто высказывание). Ясно, что к полученным предикатам можно снова приписать произвольные кванторы и т.д. Очевидно, что, приписав кванторы по всем переменным, получим высказывание. Например, пусть на множестве действительных чисел задан трехместный предикат $x^2 + y^2 \geq z^2$, который можно превратить в двуместный предикат, записав квантор: $\forall z(x^2 + y^2 \geq z^2)$ или превратить в одноместный предикат $\forall y \forall z(x^2 + y^2 \geq z^2)$, или же превратить в высказывание:

$\forall x \forall y \forall z(x^2 + y^2 \geq z^2)$. (4)

можно получить и другие высказывания, например:

$\exists x \forall y \forall z(x^2 + y^2 \geq z^2)$, (5)

$\forall x \forall y \exists z(x^2 + y^2 \geq z^2)$ (6)

и т.д. Ясно, что высказывание (6) истинно, а (4) и (5) - ложные.

3. Приведенная форма формул

*Определение 1.*Формула А называется приведенной формой, если А не содержит операций импликации и эквиваленции и знаки отрицания относятся лишь к элементарным формулам.

Пример 1. Формулы $\left(\forall x P(x,y) \vee \overline{Q(z)}\right) \to A, \overline{\overline{\overline{(B \,\&\, \overline{P(x)})}}}, \overline{\forall x Q(y)}$ не являются приведенными формами, а формулы $(\exists x\, \overline{P(x,y)} \,\&\, Q(z)) \vee A$, $\bar{S} \vee P(x)$, $\exists x\, \overline{Q(x)}$ являются приведенными формами.

Теорема 1. Всякая формула алгебры предикатов равносильна некоторой приведенной форме.

4. Пренексная форма формул

Определение 1. Говорят, что формула логики предикатов имеет нормальную форму, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Очевидно, что, используя равносильности алгебры высказываний и логики предикатов, каждую формулу логики предикатов можно привести к нормальной форме.

Например, приведем к нормальной форме формулу

$(\exists x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \to R(z)$

Пользуясь равносильными преобразованиями, получим

$$\left(\exists x P(x)^{\forall y Q(y)}\right) \to R(z) \equiv \overline{\left(\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)\right)} \vee R(z) \equiv$$

$$\equiv \overline{\overline{\exists x P(x)}} \wedge \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z)$$

Среди нормальных форм формул логики предикатов важное значение имеют так называемые предваренные нормальные формы (п.н.ф.). В них кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех операций алгебры логики, то есть предваренная нормальная форма формулы логики предикатов имеет вид:

$(\sigma x_1)(\sigma x_2)\ldots(\sigma x_n)A(x_1, x_2, \ldots, x_m), n \leq m$,

где под символом (σx_i) понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$, а формула A кванторов не содержит.

Теорема 1. Всякая формула логики предикатов может быть приведена к предваренной нормальной форме.

5. Варианты заданий по теории предикатов

Примеры решения:

1. Доказать тавтологии.

Доказать, что формула

$$F = P(y) \to (\exists x)(P(x))$$

является тавтологией исчисления предикатов.

Решение. F не замкнута – у нее есть свободная переменная y.

Поэтому в любой интерпретации φ: $L_1 \Rightarrow (M)$ образ $\varphi(F)$ будет предикатом от y на M. Нужно доказать, что он является тождественно истинным. Предположим, что

$$\varphi(P)(a) \to (\exists x)\big(\varphi(P)(x)\big) = 0$$

для некоторого $a \in M$. Тогда $\varphi(P)(a) = 1$, а значит, $\varphi(P)(x)$ выполним. В то же время $(\exists x)\big(\varphi(P)(x)\big) = 0$, что равносильно тождественной ложности $\varphi(P)(x)$.

Полученное противоречие доказывает утверждение.

2. Привести к приведенной форме.

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv \overline{\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \overline{\overline{\exists x P(x)}} \wedge \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv$$

$$+ \equiv \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z)$$

3. Привести к пренексной нормальной форме.

$$\neg(\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x Q(x))$$

Решение:

$$\neg(\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x Q(x)) \equiv \neg(\neg\forall x \exists y P(x,y) \vee \exists x Q(x)) \equiv \neg\neg\forall x E y P(x,y) \& \neg\exists x Q(x) \equiv$$

$$\equiv \forall x \exists y P(x,y) \& \forall x \neg Q(x)) \equiv \forall x \exists y P(x,y) \& \forall z \neg Q(z)) \equiv \forall x \exists y (P(x,y) \& \forall z \neg Q(z)) \equiv$$

$$\equiv \forall x \exists y \forall z (P(x,y) \& \neg Q(z)).$$

Вариант материала № 2

https://books.ifmo.ru/file/pdf/1335.pdf

Предика́т (лат. *praedicatum* «заявленное, упомянутое, сказанное») — это утверждение, высказанное о субъекте. Субъектом высказывания называется то, о чём делается утверждение.

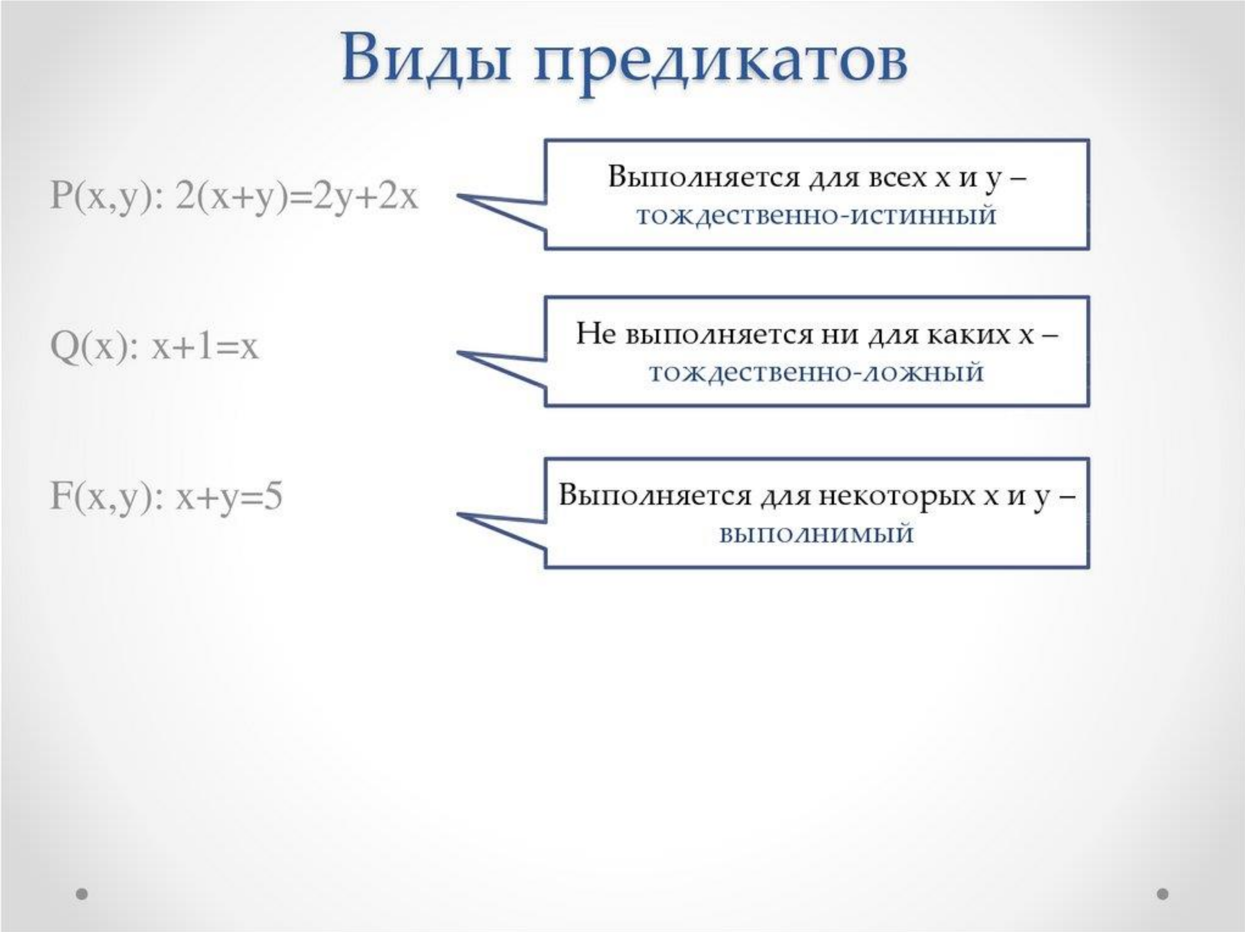
Предикат в программировании — выражение, использующее одну или более величину с результатом логического типа.

Предика́т— это функция с множеством значений 0 или 1 (или {ложь, истина}), определённая на множестве. Таким образом, каждый набор элементов множества характеризуется либо как «истинный», либо как «ложный».

Предикат — один из элементов логики первого и высших порядков. Начиная с логики второго порядка, в формулах можно ставить кванторы по предикатам.

Предикат называют *выполнимым*, если хотя бы на одном наборе аргументов он принимает значение 1.

Так как предикаты принимают только два значения, то к ним применимы все операции булевой алгебры,
например: отрицание, импликация, конъюнкция, дизъюнкция и т. д.



Логика предикатов

Понятие ``предикат'' обобщает понятие ``высказывание''. Неформально говоря, *предикат* – это высказывание, в которое можно подставлять аргументы. Если аргумент один – то предикат выражает свойство аргумента, если больше – то отношение между аргументами.

Пример предикатов. Возьмём высказывания: ``Сократ - человек'', ``Платон - человек''. Оба эти высказывания выражают свойство ``быть человеком''. Таким образом, мы можем рассматривать предикат ``быть человеком'' и говорить, что он выполняется для Сократа и Платона.

Возьмём высказывание: ``расстояние от Иркутска до Москвы 5 тысяч километров''. Вместо него мы можем записать предикат ``расстояние'' (означающий, что первый и второй аргумент этого предиката находятся на расстоянии, равном третьему аргументу) для аргументов ``Иркутск'', ``Москва'' и ``5 тысяч километров''.

•

Язык логики высказываний не вполне подходит для выражения логических рассуждений, проводимых людьми, более удобен для этого язык логики предикатов.

Пример рассуждения, не выразимого в логике высказываний. Все люди смертны. Сократ - человек. Следовательно, Сократ смертен.

Это рассуждение на языке логики высказываний можно записать тремя отдельными высказываниями. Однако никакой связи между ними установить не удастся. На языке логики предикатов эти предложения можно выразить с помощью двух предикатов: ``быть человеком" и ``быть смертным". Первое предложение устанавливает связь между этими предикатами.

•

Перейдём теперь к формальному изложению логики предикатов.

Язык логики предикатов

``Предикатные формулы" обобщают понятие пропозициональной формулы, определённое в части 2.

Предикатная сигнатура – это множество символов двух типов – *объектные константы* и *предикатные константы* – с неотрицательным целым числом, называемым *арностью*, назначенным каждой предикатной константе. Предикатную константу мы будем называть *пропозициональной*, если её арность равна 0. Пропозициональные константы являются аналогом атомов в логике высказываний. Предикатная константа *унарна*, если её арность равна 1, и *бинарна*, если её арность равна 2. Например, мы можем определить предикатную сигнатуру

$$\{ a, P, Q \} \tag{4}$$

объявляя a объектной константой, P – унарной предикатной константой, и Q – бинарной предикатной константой.

Возьмём предикатную сигнатуру s, которая включает по крайней мере одну предикатную константу и не включает ни одного из следующих символов:

- *объектные переменные* $x, y, z, x1, y1, z1, x2, y2, z2, \ldots$,
- пропозициональные связки,
- *квантор всеобщности* " и *квантор существования* $,
- скобки и запятая.

Алфавит логики предикатов состоит из элементов из s и четырёх групп дополнительных символов, указанных выше. *Строка* – это конечная последовательность символов из этого алфавита.

Терм – это объектная константа или объектная переменная. Строка называется *атомарной формулой*, если она является пропозициональной константой или имеет вид $R(t1, \ldots, t_n)$, где R – предикатная константа арности n ($n > 0$) и $t1, \ldots , t_n$ – термы. Например, если мы рассматриваем сигнатуру (4), то $P(a)$ и $Q(a, x)$ – атомарные формулы.

Множество X строк *замкнуто относительно правил построения* (для логики предикатов), если

- каждая атомарная формула принадлежит X,
- для любой строки F если F принадлежит X, то $\neg F$ тоже принадлежит,
- для любых строк F, G и любой бинарной связки Д, если F и G принадлежат X, то также принадлежит (F Д G),

- для любого квантора *K*, любой переменной *v* и любой строки *F* если *F* принадлежит *X*, то также принадлежит *Kv F*.

Строка *F* является (предикатной) формулой, если *F* принадлежит всем множествам, которые замкнуты относительно правил построения.

Например, если рассматриваемая сигнатура есть (4), тогда

(¬*P* (*a*) Ъ $ *x*(*P* (*x*) & *Q*(*x*, *y*)))

– формула.

3.1 *Является ли " x формулой?*

Как и в логике высказываний можно доказать, что множество формул замкнуто относительно правил построения. Теоремы возможности и единственности разбора подобны соответствующим теоремам для пропозициональных формул.

В случае предикатных формул доказательство по *структурной индукции* имеет следующий вид. Для данного свойства формул мы проверяем, что

- каждая атомарная формула обладает этим свойством,
- для любой формулы *F*, обладающей этим свойством, ¬*F* также обладает этим свойством,
- для любых формул *F*, *G*, обладающих этим свойством, и любой бинарной связки Д, (*F* Д *G*) также обладает этим свойством,
- для любого квантора *K*, любой переменной *v* и любой формулы *F*, обладающей этим свойством, *Kv F* также обладает этим свойством.

Тогда это свойство выполняется для всех формул.

3.2 *Если формула содержит квантор, тогда она содержит переменную. Верно или нет ?*

3.3 *Если формула содержит квантор, тогда она содержит скобки. Верно или нет ?*

При записи предикатных формул мы будем опускать некоторые скобки и применять другие сокращения, введённые в части 2. Строку вида

" *v*1 ··· " v_n (*n* i 0)

будем писать как " *v*1 ··· v_n, и подобным образом для квантора существования.

Основные понятия. Операции над предикатами

Обозначение предикатов:

- $P(.)$ – одноместный предикат (унарный).
- $P(.\ ,\ .)$ – двуместный предикат (бинарный).
- $P(.\ ,\ \ldots\ ,\ .)$ – n-местный предикат.

Задание предикатов:

1. M_n : область определения – множество состоящее из предметных переменных;
2. M=$\{0,1\}$ - область значений предиката;
3. $M_n \Rightarrow \{0,1\}$.

Алфавит алгебры предикатов состоит из следующих символов:

1) *предметные переменные* $x_1, x_2, \ldots$, которые используются для обозначения элементов множества допустимых значений,

2) n-местные *предикатные символы* $P, Q, \ldots$, которые используются для обозначения n-местных предикатов на множестве допустимых значений,

3) символы логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$,

4) вспомогательные символы (,) и другие.

Равносильность предикатов

Два n-местных предиката P(x1, x2, ..., xn) и Q(x1, x2, ..., xn), заданных над одними и теми же множествами M1, M2, …, Mn, называются **равносильными**, если набор предметов (элементов) a1 ∈ M1, a2 ∈ M2, .., an ∈ Mn превращает первый предикат в истинное высказывание P(a1, a2, …, an) в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание Q(a1, a2, …, an).

Предикаты P(x1, x2, ..., xn) и Q(x1, x2, ..., xn) равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают

$$\mathbf{P^+ = Q^+}.$$

Переход от одного равносильного предиката к другому называется **равносильным преобразованием** первого

Математическая логика. Равносильные формулы логики предикатов

http://primat.org/publ/spravochnye_materialy/matematicheskaja_logika_ravnosilnye_formuly_logiki_predikatov/37-1-0-735

Равносильные формулы логики предикатов

Две формулы логики предикатов A и B называются *равносильными на области* M, если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области M.

Две формулы логики предикатов A и B называются *равносильными*, если они равносильны на всякой области.

Здесь, как в алгебре высказываний, для равносильных формул принято обозначение A≡B.

Ясно, что все равносильности алгебры высказываний будут верны, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы логики предикатов. Но, кроме того, имеют место равносильности самой логики предикатов. Рассмотрим основные из этих равносильностей.

Пусть A и B – переменные предикаты, а C – переменное высказывание. Тогда:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x\, \overline{A(x)}$,
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$,
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$,
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$,
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$,
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [C \wedge B(x)]$,

7. $C\vee\forall xB(x)\equiv\forall x[C\vee B(x)]$,
8. $C\rightarrow\forall xB(x)\equiv\forall x[C\rightarrow B(x)]$,
9. $\forall x[B(x)\rightarrow C]\equiv\exists xB(x)\rightarrow C$,
10. $\exists x[A(x)\vee B(x)]\equiv\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$,
11. $\exists x[C\vee B(x)]\equiv C\vee\exists xB(x)$,
12. $\exists x[C\wedge B(x)]\equiv C\wedge\exists xB(x)$,
13. $\exists xA(x)\wedge\exists yB(y)\equiv\exists x\exists y[A(x)\wedge B(y)]$,
14. $\exists x[C\rightarrow B(x)]\equiv C\rightarrow\exists xB(x)$,
15. $\exists x[B(x)\rightarrow C]\equiv\forall xB(x)\rightarrow C$.

Равносильность 1 означает тот простой факт, что, если не для всех x истинно A(x), то существует x, при котором будет истиной $\bar{A}(x)$.

Равносильность 2 означает тот простой факт, что, если не существует x, при котором истинно A(x), то для всех x будет истиной $\bar{A}(x)$.

Равносильности 3 и 4 получаются из равносильностей 1 и 2, соответственно, если от обеих их частей взять отрицания и воспользоваться законом двойного отрицания.

Докажем равносильность 5. Если предикаты A(x) и B(x) одновременно тождественно истинны, то будет тождественно истинными и предикаты $A(x)\wedge B(x)$, а по-этому будут истинными высказывания:

$$\forall xA(x),\ \forall xB(x),\ \forall x[A(x)\wedge B(x)].$$

То есть в этом случае обе части равносильности 5 принимают значение "истинна".

Пусть теперь хотя бы один из предикатов, например, A(x), будет не тождественно истинным. Тогда не тождественно истинным будет и предикат $A(x)\wedge B(x)$, а по-этому ложными будут высказывания:

$$\forall xA(x),\ \forall xA(x)\wedge\forall xB(x),\ \forall x[A(x)\wedge B(x)],$$

то есть и в этом случае обе части равносильности 5 принимают одинаковые (ложные) значения. Этим исчерпывается доказательство равносильности 5.

Докажем равносильность 8. Пусть переменное высказывание C принимает значение "ложь". Тогда тождественно истинным будет предикат $C\rightarrow B(x)$ и, очевидно, истинными будут высказывания $C\rightarrow\forall xB(x)$ и $\forall x[C\rightarrow B(x)]$, то есть в этом случае обе части равносильности 8 принимают одинаковые (истинные) значения.

Пусть теперь переменное высказывание C принимает значение "истина". Если при этом переменный предикат является тождественно истинным, то будет тождественно истинным и предикат $C\rightarrow B(x)$, и значит, истинными будут высказывания $\forall xB(x)$, $C\rightarrow\forall xB(x)$, $\forall x[C\rightarrow B(x)]$, то есть и в этом случае обе части равносильности 8 принимают одинаковые (истинные) значения.

Если же предикат B(x) не является тождественно истинными, то не будет тождественно истинными и предикат $C\rightarrow B(x)$, а по-этому ложными будут высказывания $\forall xB(x)$, $C\rightarrow\forall xB(x)$, $\forall x[C\rightarrow B(x)]$.

Следовательно, и здесь обе части равносильности 8 принимают одинаковые (ложные) значения. Этим исчерпывается доказательство равносильности 8.

Аналогично доказываются остальные из перечисленных равносильностей.

В заключение отметим, сто формула $\forall x[A(x)\vee B(x)]$ не равносильна формуле $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$, а формула $\exists x[A(x)\wedge B(x)]$ не равносильна формуле $\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$.

Пример 1. Доказать равносильность:

$$\exists x(A(x)\vee B(x))\equiv\exists xA(x)\vee\exists xB(x).$$

Решение. Для доказательства равносильности достаточно рассмотреть два случая:

1. Пусть предикаты A(x) и B(x) тождественно ложны. Тогда будет тождественно ложным и предикат $A(x)\vee B(x)$. При этом будут ложными высказывания $\exists x(A(x)\vee B(x))$ и $\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$.

2. Пусть теперь хотя бы один из предикатов (например, A(x)) не тождественно ложный. Тогда будет не тождественно ложным и предmcат $A(x)\vee B(x)$. При этом будут истинными высказывания $\exists xA(x)$ и $\exists x(A(x)\vee B(x))$, а, значит, будут истинными и исходные формулы.

Следовательно, $\exists x(A(x)\vee B(x))\equiv\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$.

<u>**Пример 2.**</u> Доказать равносильность:

$$c\wedge\forall xA(x)\equiv\forall x(c\wedge A(x)).$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1. Пусть высказывание c ложно. Тогда для любого предиката A(x) будет тождественно ложным высказывание $c\wedge\forall xA(x)$ и предикат $c\wedge A(x)$, и, следовательно, высказывание $\forall x(c\wedge A(x))$. Значит, в этом случае обе исходные формулы тождественно ложны.

2. Пусть теперь высказывание c истинно. Тогда, очевидно, значения исходных формул будут целиком зависеть от значений предиката A(x). Если A(x) - тождественно истинный предикат, то будет тождественно истинным и предикат $c\wedge A(x)$, и, следовательно, будут тождественно истинными высказывания $\forall xA(x)$, $c\wedge\forall xA(x)$, $\forall x(c\wedge A(x))$,то есть тождественно истинны исходные формулы. Если же предикат A(x) не тождественно истинный, тогда будет не тождественно истинным предикат $c\wedge A(x)$, а высказывания $\forall xA(x)$, $c\wedge\forall xA(x)$, $\forall x(c\wedge A(x))$ будут ложными, то есть ложные значения принимают обе исходные формулы, что в итоге доказывает их равносильность.

Равносильные формулы логики предикатов

Пусть ***A(x)*** и ***B(x)*** – переменные предикаты, а ***C*** – переменное высказывание (или формула, не содержащая ***x***). Тогда имеют место следующие равносильности:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x\overline{A(x)}.$
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x\overline{A(x)}.$
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x\overline{A(x)}}.$
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x\overline{A(x)}}.$
5. $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \equiv \forall x[A(x) \wedge B(x)]$
6. $C \wedge \forall xB(x) \equiv \forall x[C \wedge B(x)].$
7. $C \vee \forall xB(x) \equiv \forall x[C \vee B(x)]$
8. $C \to \forall xB(x) \equiv \forall x[C \to B(x)]$
9. $\forall x[B(x) \to C] \equiv \exists xB(x) \to C.$
10. $\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists xA(x) \vee \exists xB(x).$
11. $\exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists xB(x).$
12. $\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists xB(x).$
13. $\exists xA(x) \wedge \exists yB(y) \equiv \exists x\exists y[A(x) \wedge B(y)].$
14. $\exists x[C \to B(x)] \equiv C \to \exists xB(x).$
15. $\exists x[B(x) \to C] \equiv \forall xB(x) \to C.$

ГЛОССАРИЙ

+Квантор общности- читается «для всех X предикат P(X) выполняется»

Квантор существования- читается «существует X, для которых предикат P(X) выполняется»

Предикат- свойство объекта или отношение между объектами.

Пренексная форма — формулы- это приведенная формула, в которой кванторная часть отсутствует или находится перед формулой.

Приведенная форма — формулы-это формула, которая не содержит операций импликации и эквиваленции и знаки отрицания относятся лишь к элементарным формулам.

Тавтология- тождественно истинное высказывание.