Добрый день,
Сделай те последнюю часть конспекта и приготовьтесь к тесту по теме:
«Случайные величины и их числовые характеристики».

К 9.02.2021

Распределение Пуассона: формула вероятности редких событий

Распределение Пуассона - случай биномиального распределения, когда число испытаний *n* достаточно большое, а вероятность *p* события *A* мала ($p < 0,05$).

Распределение Пуассона называют также распределением редких событий. Например, рождение за год трёх или четырёх близнецов, тот же закон распределения имеет число распавшихся в единицу времени атомов радиоактивного вещества и др.

Вероятность наступления редких событий вычисляется по формуле Пуассона:

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где *m* число наступления события *A*;

$\lambda = \mu = n \cdot p$ - среднее значение распределения Пуассона;

e=2,7183 - основание натурального логарифма.

Закон Пуассона зависит от одного параметра - λ (лямбда), смысл которого в следующем: он является одновременно математическим ожиданием и дисперсией случаной величины, распределённой по закону Пуассона.

Условия возникновения распределения Пуассона

Рассмотрим условия, при которых возникает распределение Пуассона.

Во-первых, ***распределение Пуассона является предельным для биномиального распределения***, когда число опытов *n* неограниченно увеличивается (стремится к бесконечности) и одновременно вероятность *p* успеха в одном опыте неограниченно уменьшается (стремится к нулю), но так, что их произведение *np* сохраняется в пределе постоянным и равным λ (лямбде):

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} np = \lambda .$$

В математическом анализе доказано, что распределение Пуассона с параметром $\lambda = np$ можно приближенно применять вместо биномиального, когда число опытов *n* очень велико, а вероятность *p* очень мала, то есть в каждом отдельном опыте событие *A* появляется крайне редко.

Во-вторых, ***распределение Пуассона имеет место, когда есть поток событий, называемым простейшим (или стационарным пуассоновским потоком)***. Потоком событий называют последовательность таких моментов, как поступление вызовов на коммуникационный узел, приходы посетителей в магазин, прибытие составов на сортировочную горку и тому подобных. Пуассоновский поток обладает следующими свойствами:

- стационарность: вероятность наступления *m* событий в определённый период времени постоянна и не зависит от начала отсчёта времени, а зависит только от длины участка времени;
- ординарность: вероятность попадания на малый участок времени двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него одного события;
- отсутствие последствия: вероятность наступления *m* событий в определённый период времени не зависит от того, сколько событий наступило в предыдущий период.

Характеристики случайной величины, распределённой по закону Пуассона

Характеристики случайной величины, распределённой по закону Пуассона:

математическое ожидание $\mu = np = \lambda$;

стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\lambda}$;

дисперсия $\sigma^2 = \lambda$.

Равномерное распределение, плотность вероятности, функция распределения равномерно распределённой случайной величины

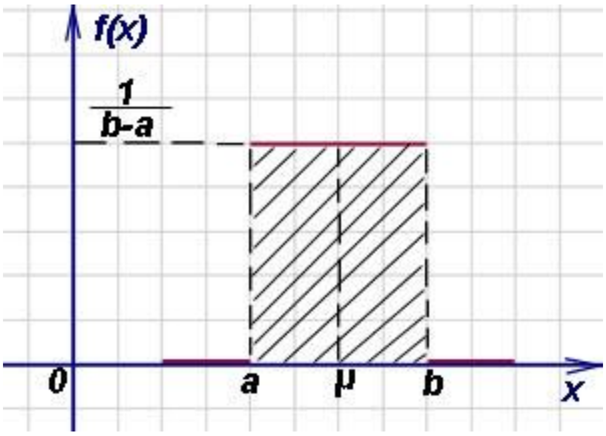
Равномерным распределением непрерывной случайной величины называется распределение, в котором значения случайной величины с двух сторон ограничены и в границах интервала имеют одинаковую вероятность. Это означает, что в в данном интервале плотность вероятности постоянна.

Таким образом, при равномерном распределении плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a,\ b], \\ 0, & \text{если } x \notin [a,\ b]. \end{cases}$$

Значения $f(x)$ в крайних точках *a* и *b* участка (a, b) не указываются, так как вероятность попадания в любую из этих точек для непрерывной случайной величины равна нулю.

Кривая равномерного распределения имеет вид прямоугольника, опирающегося на участок (a, b) (рисунок ниже), в связи с чем равномерное распределение иногда называют "прямоугольным".

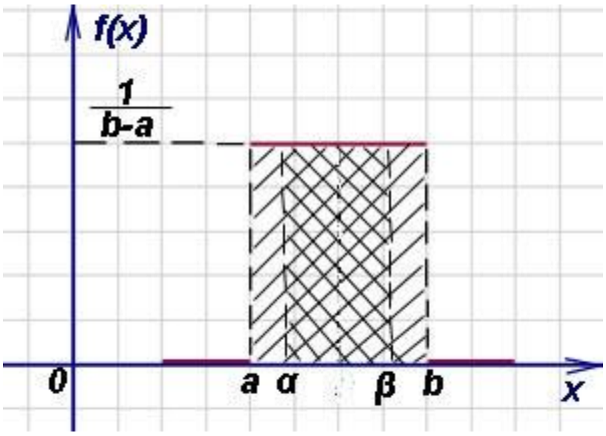


Как найти вероятность попадания случайной величины X, равномерно распределённой на участке (a, b) на любую часть (α, β) участка (a, b) ?

Эта вероятность находится по формуле

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

и геометрически представляет собой площадь, дважды заштрихованную на рисунке ниже и опирающуюся на часть (α, β) участка (a, b):



Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины при равномерном распределении имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a,\ b], \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Характеристики равномерного распределения

Характеристики равномерного распределения:

- среднее значение (математическое ожидание) $\mu = \dfrac{a+b}{2}$;
- дисперсия $\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$;

- стандартное отклонение $\sigma = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$;
- равномерное распределение не имеет моды.

Решение примеров на равномерное распределение

Пример 1. Наблюдения показали, что вес ящика, предназначенного для транспортировки овощей, является равномерно распределённой случайной величиной в интервале от 985 г. до 1025 г. Случайно выбран один ящик. Найти характеристики равномерно распределённой случаной величины при условиях, которые будут указаны в решении.

Решение. Найдём вероятность того, что вес данного ящика будет в интервале от 995 г. до 1005 г. :

$$P(995 \leq X \leq 1005) = \frac{1005-995}{1025-985} = 0,25$$.

Найдём среднее значение непрерывной случайной величины:

$$\mu = \frac{985+1025}{2} = 1005$$.

Найдём стандартное отклонение:

$$\sigma = \frac{1025-985}{\sqrt{12}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$.

Определим, у скольки процентов ящиков вес находится на удалении одного стандартного отклонения от среднего значения (т. е. в интервале $[\mu-\sigma,\ \mu+\sigma]$):

$$P\left(1005 - \frac{20}{\sqrt{3}} \leq X \leq 1005 + \frac{20}{\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \frac{\left(1005+20/\sqrt{3}\right)-\left(1005-20/\sqrt{3}\right)}{1025-985} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58 = 58\%.$$

.

Пример 2. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 (мин.). Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени, никак не связанный с расписанием поездов. Случайная величина *T* - время, в течение которого ему придётся ждать поезда, имеет равномерное распределение. Найти плотность распределения $f(x)$ случайной величины *T*, её математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти вероятность того, что ждать придётся не больше полминуты.

Решение. Найдём плотность распределения $f(x)$:

$f(x) = 1/2\ (0 < x < 2)$.

Найдём математическое ожидание случайной величины:

$\mu = (2 + 0)/2 = 1$.

Найдём дисперсию:

$\sigma^2 = 2^2/12 = 1/3$.

Стандартное отклонение:

$\sigma = (\sqrt{3})/3$.

Найдём вероятность того, что пассажиру придётся ждать поезда не больше полминуты:

$P\{T < 1/2\} = 1/4$.

Пример 3. Случайная величина *X* распределена равномерно на участке (a, b). Найти вероятность того, что в результате опыта она отклонится от своего математического ожидания больше, чем на 3σ.

Решение. Найдём стандартное отклонение:

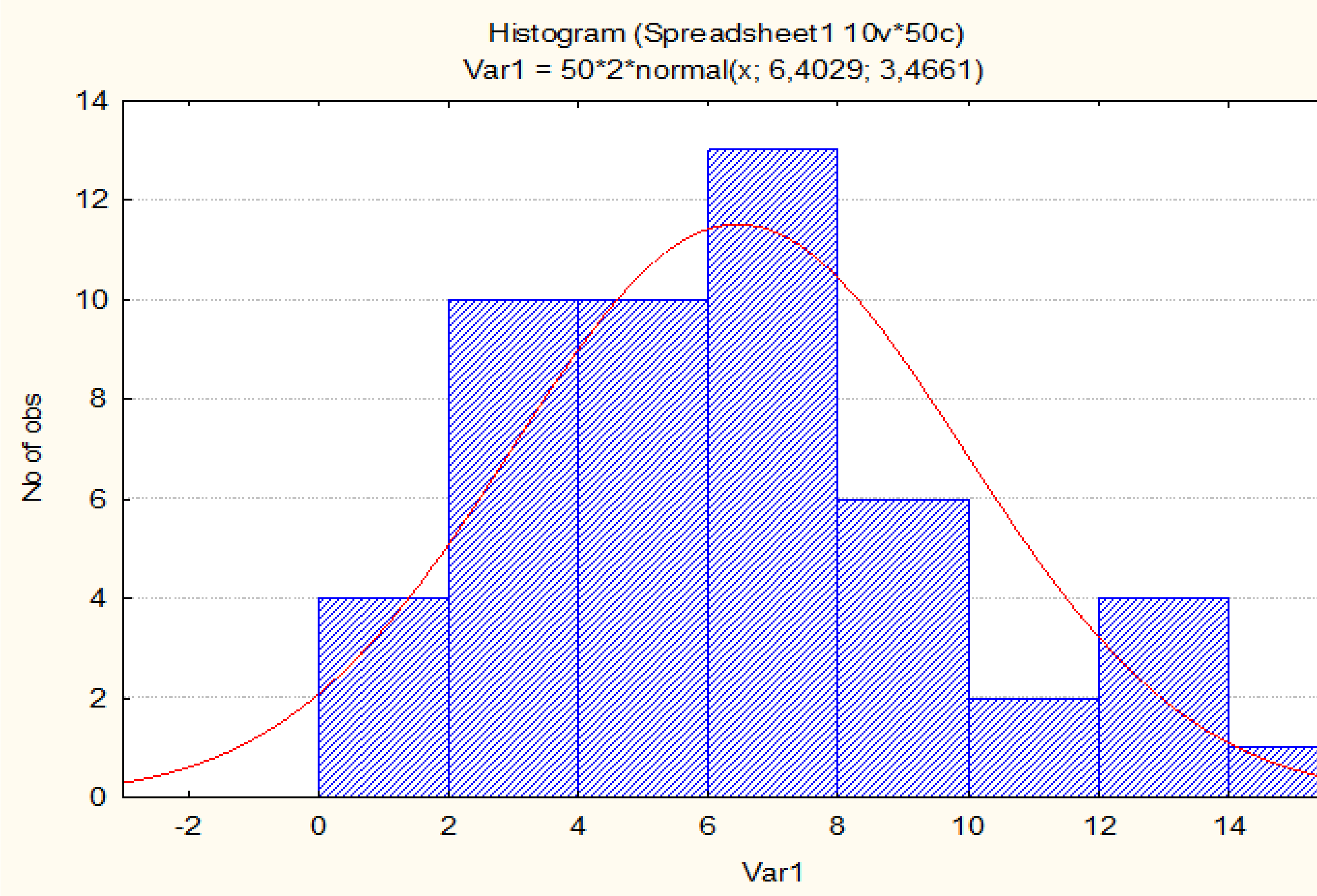
$\sigma = (b - a)/(2\sqrt{3})$;

$3\sigma = 3(b - a)/(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}(b - a)/2$;

При равномерном распределении на участке (a, b) крайние точки *a* и *b*, ограничивающие участок возможных значений случайной величины, отстоят от её математического ожидания $\mu = (a + b)/2$ на расстояние $(b - a)/2$, которое меньше, чем $\sqrt{3}(b - a)/2$. Следовательно, вероятность события, обозначенного в условии задачи, равна нулю.

Нормальное распределение: теоретические основы

Примерами случайных величин, распределённых по нормальному закону, являются рост человека, масса вылавливаемой рыбы одного вида. ***Нормальность распределения означает следующее***: существуют значения роста человека, массы рыбы одного вида, которые на интуитивном уровне воспринимаются как "нормальные" (а по сути - усреднённые), и они-то в достаточно большой выборке встречаются гораздо чаще, чем отличающиеся в бОльшую или меньшую сторону.



Нормальное распределение вероятностей непрерывной случайной величины (иногда - распределение Гаусса) можно назвать колоколообразным из-за того, что симметричная относительно среднего функция плотности этого распределения очень похожа на разрез колокола (красная кривая на рисунке выше).

Вероятность встретить в выборке те или иные значение равна площади фигуры под кривой и в случае нормального распределения мы видим, что под верхом "колокола", которому соответствуют значения, стремящиеся к среднему, площадь, а значит, вероятность, больше, чем под краями. Таким образом, получаем то же, что уже сказано: вероятность встретить человека "нормального" роста, поймать рыбу "нормальной" массы выше, чем для значений, отличающихся в бОльшую или меньшую сторону. В очень многих случаях практики ошибки измерения распределяются по закону, близкому к нормальному.

Остановимся ещё раз на рисунке в начале урока, на котором представлена функция плотности нормального распределения. График этой функции получен при рассчёте некоторой выборки данных в пакете программных средств *STATISTICA*. На ней столбцы гистограммы представляют собой интервалы значений выборки, распределение которых близко (или, как принято говорить в статистике, незначимо отличаются от) к собственно графику функции плотности нормального распределения, который представляет собой кривую красного цвета. На графике видно, что эта кривая действительно колоколообразная.

Нормальное распределение во многом ценно благодаря тому, что зная только математическое ожидание непрерывной случайной величины и стандартное отклонение, можно вычислить любую вероятность, связанную с этой величиной.

Нормальное распределение имеет ещё и то преимущество, что один из наиболее простых в использовании **статистических критериев, используемых для** проверки статистических гипотез - критерий Стьюдента - может быть использован только в том случае, когда данные выборки подчиняются нормальному закону распределения.

Функцию плотности нормального распределения непрерывной случайной величины можно найти по формуле:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где *x* - значение изменяющейся величины, μ - среднее значение, σ - стандартное отклонение, *e*=2,71828... - основание натурального логарифма, π=3,1416...

Свойства функции плотности нормального распределения

- для всех значений аргумента функция плотности положительна;
- если аргумент стремится к бесконечности, то функция плотности стреится к нулю;
- функция плотности симметрична относительно среднего значения: $f(\mu+x)=f(\mu-x)$;
- наибольшее значение функции плотности - у среднего значения: $f_{\max}(x)=f(\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
- кривая функции плотности выпукла в интервале $(\mu-\sigma);\ (\mu+\sigma)$ и вогнута на остальной части;
- мода и медиана нормального распределения совпадает со средним значением;
- при нормальном распределении коэффициенты ассиметрии и эксцесса равны нулю (подробнее рассмотрим это свойство в следующем параграфе о приближенном методе проверки нормальности распределения).

Изменения среднего значения μ перемещают кривую функции плотности нормального распределения в направлении оси *Ox*. Если μ возрастает, кривая перемещается вправо, если μ уменьшается, то влево.

Если меняется стандартное отклонение, то меняется высота вершины кривой. При увеличении стандартного отклонения вершина кривой находится выше, при уменьшении - ниже.

Вероятность попадания значения нормально распределённой случайной величины в заданный интервал

Уже в этом параграфе начнём решать практические задачи, смысл которых обозначен в заголовке. Разберём, какие возможности для решения задач предоставляет теория. Отправное понятие для вычисления вероятности попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал - интегральная функция нормального распределения.

Интегральная функция нормального распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$.

Однако проблематично получить таблицы для каждой возможной комбинации среднего и стандартного отклонения. Поэтому одним из простых способов вычисления вероятности попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал является использование таблиц вероятностей для стандартизированного нормального распределения.

Стандартизованным или нормированным называется нормальное распределение, среднее значение которого $\mu = 0$, а стандартное отклонение $\sigma = 1$.

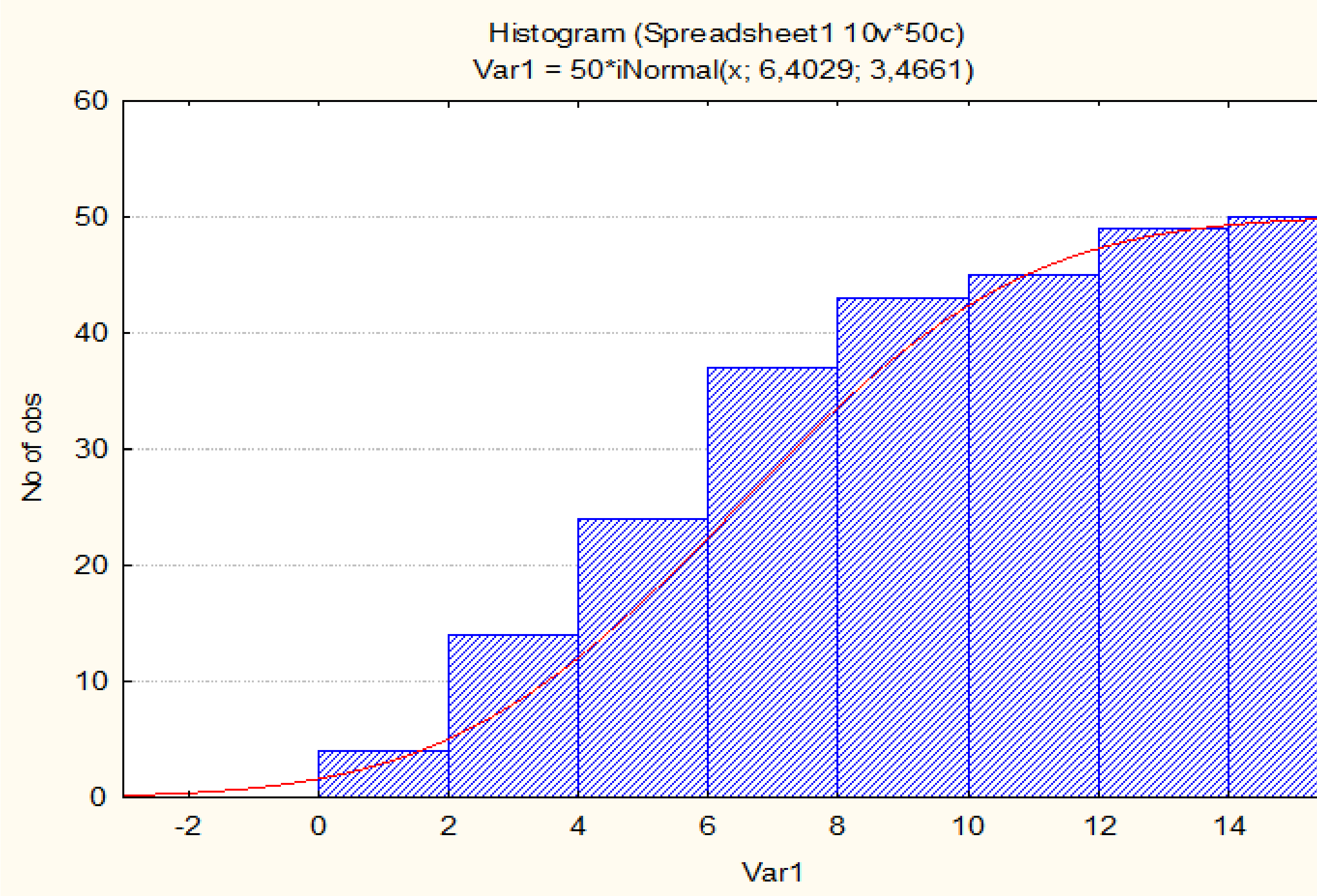
Функция плотности стандартизованного нормального распределения:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$.

Интегральная функция стандартизованного нормального распределения:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$.

На рисунке ниже представлена интегральная функция стандартизованного нормального распределения, график которой получен при рассчёте некоторой выборки данных в пакете программных средств *STATISTICA*. Собственно график представляет собой кривую красного цвета, а значения выборки приближаются к нему.



Для увеличения рисунка можно щёлкнуть по нему левой кнопкой мыши.

Стандартизация случайной величины означает переход от первоначальных единиц, используемых в задании, к стандартизованным единицам. Стандартизация выполняется по формуле

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

На практике все возможные значения случайной величины часто не известны, поэтому значения среднего μ и стандартного отклонения σ точно определить нельзя. Их заменяют средним арифметическим наблюдений $\bar{x}$ и стандартным отклонением *s*. Величина *z* выражает отклонения значений случайной величины от среднего арифметического при измерении стандартных отклонений.

Открытый интервал

Таблица вероятностей для стандартизированного нормального распределения, которая есть практически в любой книге по статистике, содержит вероятности того, что имеющая стандартное нормальное распределение случайная величина *Z* примет значение меньше некоторого числа *z*. То есть попадёт в открытый интервал от минус бесконечности до *z*. Например, вероятность того, что величина *Z* меньше 1,5, равна 0,93319.

Пример 1. Предприятие производит детали, срок службы которых нормально распределён со средним значением 1000 и стандартным отклонением 200 часов.

Для случайно отобранной детали вычислить вероятность того, что её срок службы будет не менее 900 часов.

Решение. Введём первое обозначение:

$P(X \geq 900)$ - искомая вероятность.

Значения случайной величины находятся в открытом интервале. Но мы умеем вычислять вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее заданного, а по условию задачи требуется найти равное или большее заданного. Это другая часть пространства под кривой плотности нормального распределения (колокола). Поэтому, чтобы найти искомую вероятность, нужно из единицы вычесть упомянутую вероятность того, что случайная величина примет значение, меньше заданного 900:

$$P(X \geq 900) = 1 - P(X \leq 900)$$

Теперь случайную величину нужно стандартизировать.

Продолжаем вводить обозначения:

$z = (X \leq 900);$

$x = 900$ - заданное значение случайной величины;

$\mu = 1000$ - среднее значение;

$\sigma = 200$ - стандартное отклонение.

По этим данным условия задачи получаем:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{900 - 1000}{200} = -0,5.$$

По таблицам стандартизированной случайной величине (границе интервала) $z = -0,5$ соответствует вероятность 0,30854. Вычтем ее из единицы и получим то, что требуется в условии задачи:

$$P(X \geq 900) = 1 - 0,30854 = 0,69146.$$

Итак, вероятность того, что срок службы детали будет не менее 900 часов, составляет 69%.

Эту вероятность можно получить, используя функцию MS Excel НОРМ.РАСП (значение интегральной величины - 1):

$P(X \geq 900)$ = 1 - $P(X \leq 900)$ = 1 - НОРМ.РАСП(900; 1000; 200; 1) = 1 - 0,3085 = 0,6915.

О расчётах в MS Excel - в одном из последующих параграфах этого урока.

Пример 2. В некотором городе среднегодовой доход семьи является нормально распределённой случайной величиной со средним значением 300000 и стандартным отклонением 50000. Известно, что доходы 40 % семей меньше величины *A*. Найти величину *A*.

Решение. В этой задаче 40 % - ни что иное, как вероятность того, что случайная величина примет значение из открытого интервала, меньшее определённого значения, обозначенного буквой *A*.

Чтобы найти величину *A*, сначала составим интегральную функцию:

$$P(X \leq A) = P(z) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

По условию задачи

$\mu = 300000$ - среднее значение;

$\sigma = 50000$ - стандартное отклонение;

$x = A$ - величина, которую нужно найти.

Составляем равенство

$$P(z) = P\left(\frac{A-300000}{50000}\right) = 0,40$$
.

По статистическим таблицам находим, что вероятность 0,40 соответствует значению границы интервала $z = -0{,}25$.

Поэтому составляем равенство

$$\frac{A-300000}{50000} = -0,25$$

и находим его решение:

$A = 287300$.

Ответ: доходы 40 % семей менее 287300.

Закрытый интервал

Во многих задачах требуется найти вероятность того, что нормально распределённая случайная величина примет значение в интервале от z_1 до z_2. То есть попадёт в закрытый интервал. Для решения таких задач необходимо найти в таблице вероятности, соответствующие границам интервала, а затем найти разность этих вероятностей. При этом требуется вычитать меньшее значение из большего. Примеры на решения этих распространённых задач - следующие, причём решить их предлагается самостоятельно, а затем можно посмотреть правильные решения и ответы.

Пример 3. Прибыль предприятия за некоторый период - случайная величина, подчинённая нормальному закону распределения со средним значением 0,5 млн. у.е. и стандартным отклонением 0,354. Определить с точностью до двух знаков после запятой вероятность того, что прибыль предприятия составит от 0,4 до 0,6 у.е.

[Правильное решение и ответ.]

Пример 4. Длина изготавливаемой детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с параметрами μ=10 и σ=0,071. Найти с точностью до двух знаков после запятой вероятность брака, если допустимые размеры детали должны быть 10±0,05.

Подсказка: в этой задаче помимо нахождения вероятности попадания случайной величины в закрытый интервал (вероятность получения небракованной детали) требуется выполнить ещё одно действие.

[Правильное решение и ответ.]

Функция

$$\Phi(z) = P(-z \le Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{+z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

позволяет определить вероятность того, что стандартизованное значение *Z* не меньше -*z* и не больше +*z*, где *z* - произвольно выбранное значение стандартизованной случайной величины.

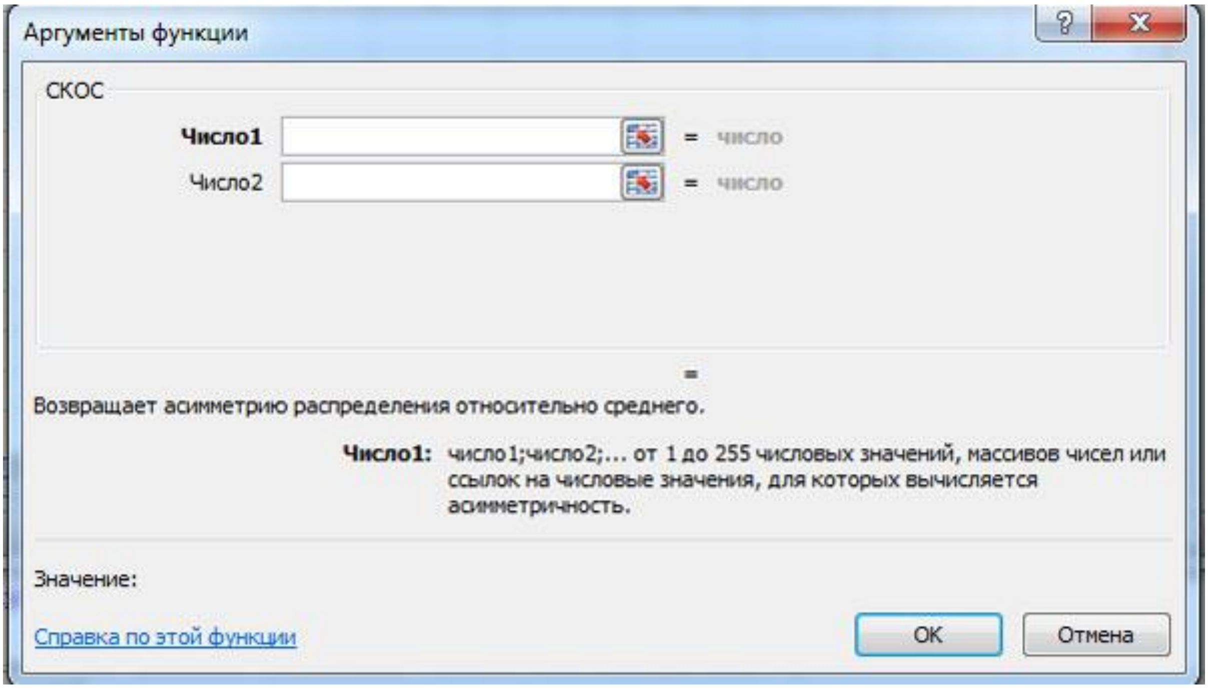
Приближенный метод проверки нормальности распределения

Приближенный метод проверки нормальности распределения значений выборки основан на следующем **свойстве нормального распределения: коэффициент асимметрии β_1 и коэффициент эксцесса β_2 равны нулю**.

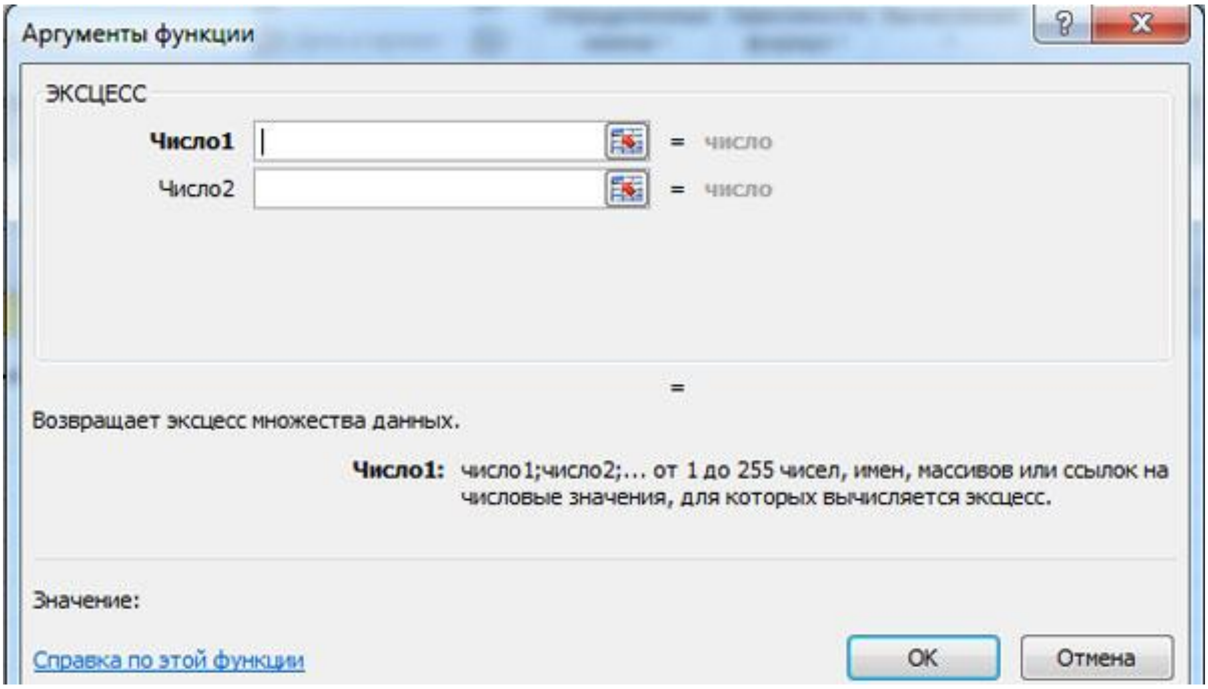
Коэффициент асимметрии β_1 численно характеризует симметрию эмпирического распределения относительно среднего. Если коэффициент асимметрии равен нулю, то среднее арифметического значение, медиана и мода равны: $\bar{x} = Me = Mo$ и кривая плотности распределения симметрична относительно среднего. **Если коэффициент асимметрии меньше нуля** ($\beta_1 < 0$), то среднее арифметическое меньше медианы, а медиана, в свою очередь, меньше моды ($\bar{x} < Me < Mo$) и **кривая сдвинута вправо (по сравнению с нормальным распределением)**. **Если коэффициент асимметрии больше нуля** ($\beta_1 > 0$), то среднее арифметическое больше медианы, а медиана, в свою очередь, больше моды ($\bar{x} > Me > Mo$) и **кривая сдвинута влево (по сравнению с нормальным распределением)**.

Коэффициент эксцесса β_2 характеризует концентрацию эмпирического распределения вокруг арифметического среднего в направлении оси Oy и степень островершинности кривой плотности распределения. **Если коэффициент эксцесса больше нуля, то кривая более вытянута (по сравнению с нормальным распределением)** вдоль оси Oy (график более островершинный). **Если коэффициент эксцесса меньше нуля, то кривая более сплющена (по сравнению с нормальным распределением)** вдоль оси Oy (график более туповершинный).

Коэффициент асимметрии можно вычислить с помощью функции MS Excel СКОС. Если вы проверяете один массив данных, то требуется ввести диапазон данных в одно окошко "Число".



Коэффициент эксцесса можно вычислить с помощью функции MS Excel ЭКСЦЕСС. При проверке одного массива данных также достаточно ввести диапазон данных в одно окошко "Число".



Итак, как мы уже знаем, при нормальном распределении коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю. Но что, если мы получили коэффициенты асимметрии, равные -0,14, 0,22, 0,43, а коэффициенты эксцесса, равные 0,17, -0,31, 0,55? Вопрос вполне справедливый, так как практически мы имеем дело лишь с приближенными, выборочными значениями асимметрии и эксцесса, которые подвержены некоторому неизбежному, неконтролируемому разбросу. Поэтому нельзя требовать строгого равенства этих коэффициентов нулю, они должны лишь быть достаточно близкими к нулю. Но что значит - достаточно?

Требуется сравнить полученные эмпирические значения с допустимыми значениями. Для этого нужно проверить следующие неравенства (сравнить значения коэффициентов по модулю с критическими значениями - границами области проверки гипотезы).

Для коэффициента асимметрии β_1:

$$|\beta_1| < \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \bullet \sigma_{\beta_1},$$

где

$\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$,

$\sigma_{\beta_1} \approx \sqrt{\frac{6 \bullet (n-2)}{(n+1) \bullet (n+3)}}$ - среднеквадратическое отклонение для выборки с числом наблюдений n.

Для коэффициента эксцесса β_2:

$$\left|\beta_2 + \frac{6}{n+1}\right| < \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \bullet \sigma_{\beta_2},$$

где

$\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$,

$\sigma_{\beta_2} \approx \sqrt{\frac{24n \bullet (n-2) \bullet (n-3)}{(n+1)^2 \bullet (n+3) \bullet (n+5)}}$ - среднеквадратическое отклонение для выборки с числом наблюдений n.

Так как коэффициенты асимметрии и эксцесса могут оказаться и положительными, и отрицательными, то в приближенном методе проверки нормальности распределения используется двусторонний квантиль стандартного нормального распределения; он задаёт интервал, в который случайная величина попадает с определённой вероятностью. Приведём **значения двусторонних квантилей стандартного нормального распределения** определённых уровней (слева - уровень, справа - значение квантиля):

- 0,90: 1,645
- 0,95: 1,960
- 0,975: 2,241
- 0,98: 2,326
- 0,99: 2,576
- 0,995: 2,807
- 0,999: 3,291
- 0,9995: 3,481
- 0,9999: 3,891

Например, для выборки с числом наблюдений $n = 50$ и $\alpha = 0{,}05$, пользуясь этими значениями и ранее приведёнными формулами, можно получить границу области принятия гипотезы для коэффициента асимметрии 0,62 и для коэффициента эксцесса 1,15. Поэтому приведённые ранее примеры эмпирических значений коэффициента асимметрии -0,14, 0,22, 0,43 попадают в область принятия гипотезы. То же самое относится к значениям коэффициента эксцесса 0,17, -0,31, 0,55. Следовательно, если получены такие эмпирические значения, то с вероятностью 95% данные выборки подчиняются нормальному закону распределения.

Решим ещё задачи на нормальное распределение

Решить задачу самостоятельно, а затем посмотреть решение

Пример 5. Определить с точностью до двух знаков после запятой вероятность попадания при стрельбе в полосу шириной 3,5 м, если ошибки стрельбы подчиняются нормальному закону распределения со средним значением 0 и $\sigma = 1{,}9$.

Правильное решение и ответ.

Решим ещё одну задачу вместе

Пример 6. О случайной величине *X* известно, что она нормально распределена, а вероятности того, что она составит 10 или меньше и больше 25, соответственно $P(X \leq 10) = 0{,}2$ и $P(X > 25) = 0{,}1$. Найти среднее значение (математическое ожидание) случайной величины и её дисперсию.

Решение. Используем данные в условии задачи вероятности:

$$P(X \leq 10) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{10-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{10-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}20.$$

$$P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) =$$

$$1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{25-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}1.$$

Пользуясь статистическими таблицами, находим:

$$\frac{10-\mu}{\sigma} = -0{,}84$$

$$P\left(Z \leq \frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \frac{25-\mu}{\sigma} \approx 1{,}28$$

Составляем систему из полученных равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{10-\mu}{\sigma} = -0{,}84 \\ \dfrac{25-\mu}{\sigma} = 1{,}28 \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$\mu \approx 16, \quad \sigma \approx 7, \quad \sigma^2 \approx 49$.