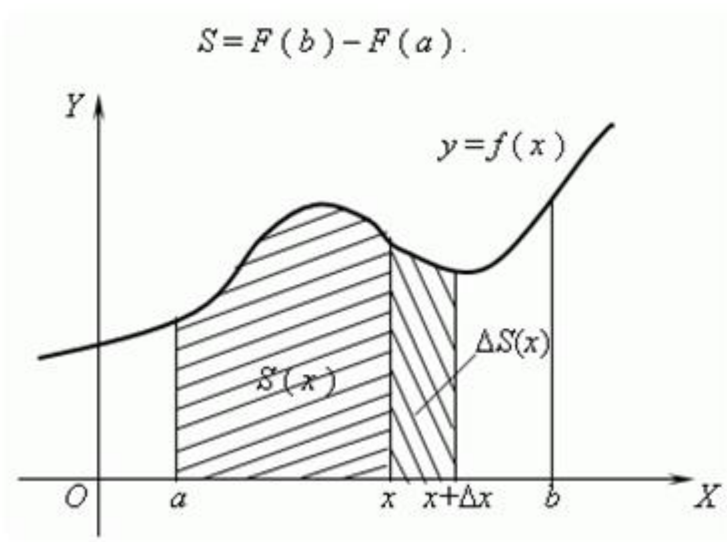
Интеграл — одно из важнейших понятий математического анализа, которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и тому подобных, а также в задаче о восстановлении функции по её производной. Упрощённо интеграл можно представить, как аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых. В зависимости от пространства, на котором задана подынтегральная функция, интеграл может быть — двойной, тройной, криволинейный, поверхностный и так далее; также существуют разные подходы к определению интеграла — различают интегралы Римана, Лебега, Стилтьеса и другие.

https://myalfaschool.ru/articles/neopredelennyj-integral

Определение неопределенного интеграла

Интеграл является важной частью дифференциального исчисления. Интегралы могут быть двойные, тройные и т.д. Для нахождения площади поверхности и объема геометрических тел используются различные типы интегралов.
Неопределенный интеграл имеет вид: ∫f(x)dx∫f(x)dx и определенный интеграла имеет вид: ∫baf(x)dx∫abf(x)dx
Область плоскости, ограниченной графиком определенный интеграла:



Операция интегрирования обратна операции дифференцирования. По этой причине надо вспомнить первообразную, функцию, таблицу производных.
Функция F(x)=x2F(x)=x2 является первообразной для функции f(x)=2xf(x)=2x. Функции f(x)=x2+2f(x)=x2+2 и f(x)=x2+7f(x)=x2+7 также является первообразными для функции f(x)=2xf(x)=2x. 22 и 7−7− это константы, производные которых равны нулю, поэтому мы можем подставлять их сколько угодно, значение первообразной

не изменится. Для записи неопределенного интеграла использует знак ∫∫. Неопределенный интеграл - это совокупность всех первообразных функции $f(x)=2x$f(x)=2x.

Операции интегрирования обратны дифференцированию.

$\int 2x = x^2 + C$∫2x=x2+C,

где CC это константа интегрирования, то есть если мы вычислим производную x^2x2, то получим $2x$2x, а это и есть $\int 2x$∫2x. Легко, не правда ли? Если вы не поняли, то вам надо повторить производную функции. Теперь мы можем вывести формулу по которой мы будем вычислять интеграл: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$∫undu=un+1n+1, n≠−1. мы вычитали 1, теперь мы прибавляем 1, n не может быть равно 0.

Также существуют другие правила интегрирования для других основных функций которые надо выучить:

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, x > 0$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
13. «Высокий логарифм»:
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x| \neq a$$
14. «Длинный логарифм»:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Решение неопределенного интеграла — это обратный процесс нахождения первообразных дифференциального уравнения.

Мы находим функцию, производная которой является интегралом, и не забываем добавлять "+ C" в конце.

Принципы интегрального исчесления были сформулированы независимо друг от друга Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем в конце 17-го века. Бернхард Риман дал строгое математическое определение интегралов. Первым документированным систематическим методом, способным определять интегралы, является метод исчесления древнегреческого астронома Евдокса, который пытался найти площади и объемы, разбив их на бесконечное число известных площадей и объемов. Этот метод был далее разработан и использован Архимедом в 3-м веке до н. э. и использовался для расчета площадей парабол и приближения к площади круга.

Аналогичный метод был независимо разработан в Китае около 3-го века нашей эры Лю Хуэем, который использовал его, чтобы найти площадь круга. Этот метод позже был использован в 5-м веке китайскими математиками-отцом и сыном ЗУ Чунчжи и ЗУ Генгом, чтобы найти объем сферы.

Следующие значимые достижения в интегральном исчислении не появлялись до 17-го века. В это время работы Кавальери и Ферма начали закладывать основы современного исчисления.

В частности, фундаментальная теорема исчисления интегралов позволяет решать гораздо более широкий класс задач. Равным по важности является комплексная математическая структура, которую разработали Ньютон и Лейбниц. Эта структура интегралов взята непосредственно из работы Лейбница и стала современным интегральным исчислением. Исчисление было изменено Риманом, используя пределы. Впоследствии были рассмотрены более общие функции, особенно в контексте анализа Фурье, к которым определение Римана не применяется. Лебег сформулировал другое определение интеграла, основанное в теории мер (подполе реального анализа).
Современное обозначение неопределенного интеграла было введено Готфридом Лейбницем в 1675 году.

Интегралы широко используются во многих областях математики. Например, в теории вероятностей интегралы используются для определения вероятности попадания некоторой случайной величины в определенный диапазон.
Интегралы могут быть использованы для вычисления площади двумерной области, имеющей криволинейную границу, а также для вычисления объема трехмерного объекта, имеющего криволинейную границу.
Интегралы используются в физике, в таких областях, как кинематика, чтобы найти перемещение, время и скорость.

http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html

Первообразная функция, неопределённый интеграл и его свойства

К понятию *первообразной функции* приводят многие задачи математического анализа и физики. Рассмотрим былинный физический пример: известен закон изменения скорости тела $v(t)$, требуется найти закон изменения координаты $x(t)$ данного тела.

Скорость – это производная от пройдённого пути: $x'_t(t) = v(t)$ (см. урок о **смысле производной**), таким образом, для решения задачи необходимо по заданной функции $v(t)$ (производной) *восстановить* функцию $x(t)$.

Общая же постановка вопроса такова: в распоряжении есть некоторая функция $f(x)$ и возникает потребность выяснить, от какой функции она произошла. То есть, необходимо найти ТАКУЮ функцию $F(x)$, чтобы $F'(x) = f(x)$.

Определение: функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или, что то же: $d(F(x)) = f(x)dx$ *(раскрывать дифференциал мы научились ещё на первом уроке о* ***неопределённом интеграле****)*.

Например, для $f(x) = x^2$ *первообразной функцией* на всей числовой прямой будет являться функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$. И действительно, для любого «икс»:

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Простое, но требующее доказательства утверждение:

Теорема: пусть $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке. Тогда функция $F(x)+C$, где C – произвольная константа, тоже будет *первообразной функцией* для $f(x)$ на данном промежутке.

Доказательство: поскольку **производная константы** равна нулю, то: $(F(x)+C)' = F'(x)+0 = F'(x) = f(x)$, следовательно, $F(x)+C$ – первообразная для функции $f(x)$ по определению первообразной, что и требовалось доказать.

Так, для функции $f(x) = x^2$ первообразной будет являться любая функция из множества $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, где $C = const$ (мысленно поподставляйте конкретные числовые значения).

Докажем обратное утверждение: любая другая первообразная $G(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ лишь на приплюсованную константу, иными словами: $G(x) - F(x) = C$.

Вот это уже менее очевидный факт. И в самом деле – вдруг для функции $f(x) = x^2$ существует не только $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, а какая-нибудь ещё первообразная?

Пусть $G(x),\ F(x)$ – это две первообразные для функции $f(x)$ на некотором промежутке. Тогда *для любого «икс» из данного промежутка* **производная разности** будет равна:

$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, или если записать короче:

$(G(x) - F(x))' = 0$

Но с другой стороны, из **дифференциального исчисления** известно, что данному условию удовлетворяет функция-константа и только она:
$(C)' = 0$

Откуда и следует равенство $G(x)-F(x)=C$, которое требовалось доказать.
Таким образом, *любая первообразная* для функции $f(x)$ имеет вид $G(x)=F(x)+C$

Вуаля:

Определение: множество всех первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению:

$\int f(x)dx = F(x)+C$, где $C = const$

Напоминаю, что функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*,

$f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*,

а сам процесс отыскания множества первообразных $F(x)+C$ – **интегрированием**.

Интегрирование – это восстановление функции $F(x)+C$ по её производной $f(x)$ (обратное действие по отношению к дифференцированию).

Для нашего демонстрационного примера:

$\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+C$, где $C = const$

Проверка: $\left(\frac{x^3}{3}+C\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2+0 = x^2$ – исходная подынтегральная функция.

Любая ли функция интегрируема? Нет.

Сформулируем **достаточное условие интегрируемости**: если на некотором промежутке функция непрерывна, то она интегрируема на нём.

Как видите, условие довольно-таки лояльное – **для существования первообразной *достаточно* лишь непрерывности**.

Ниже по тексту, если не сказано иного, все функции будем считать интегрируемыми.

Свойства неопределённого интеграла

Нумеровать крайне не люблю, но здесь лучшего варианта не видно:

1) Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

Доказательство: по определению неопределённого интеграла: $\int f(x)dx = F(x)+C$, следовательно:

$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x)$, что и требовалось доказать.

Второе. По правилу раскрытия дифференциала (а точнее, по **определению дифференциала**) и только что доказанному пункту:

$$d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)' \cdot dx = f(x)dx$$

Потёрто.

2) Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Учитывая, что $d(F(x)) = F'(x)dx$, свойство можно переписать в следующем виде:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

Тут даже доказывать ничего не надо, поскольку $F'(x) = f(x)$ и получается непосредственно само определение неопределённого интеграла.

Как видите, в обоих случаях значки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, что естественно.

Следующие свойства вам хорошо знакомы – это мировые *свойства линейности*, которые справедливы и для других типов интегралов: **определённых**, **двойных**, **тройных**, **криволинейных** и пр.

3) Константу можно вынести из-под знака интеграла

То есть, если $k = const \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

Доказательство: а вы как думали? =)

Найдём производную левой части. Используем свойство №1:

$$\left(\int kf(x)dx\right)' = kf(x)$$

4) Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Справедливо для любого количества слагаемых.

Свойство проверяется точно так же, как и предыдущее – берутся производные от обеих частей.

Определённый интеграл и его свойства

Настал момент, который все ждали, затаив дыхание.

Что такое определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и почему он есть площадь?

Да и откуда взялся сам значок интеграла?

Вот мы много раз слышали: «интеграл, интеграл, интеграл, …».

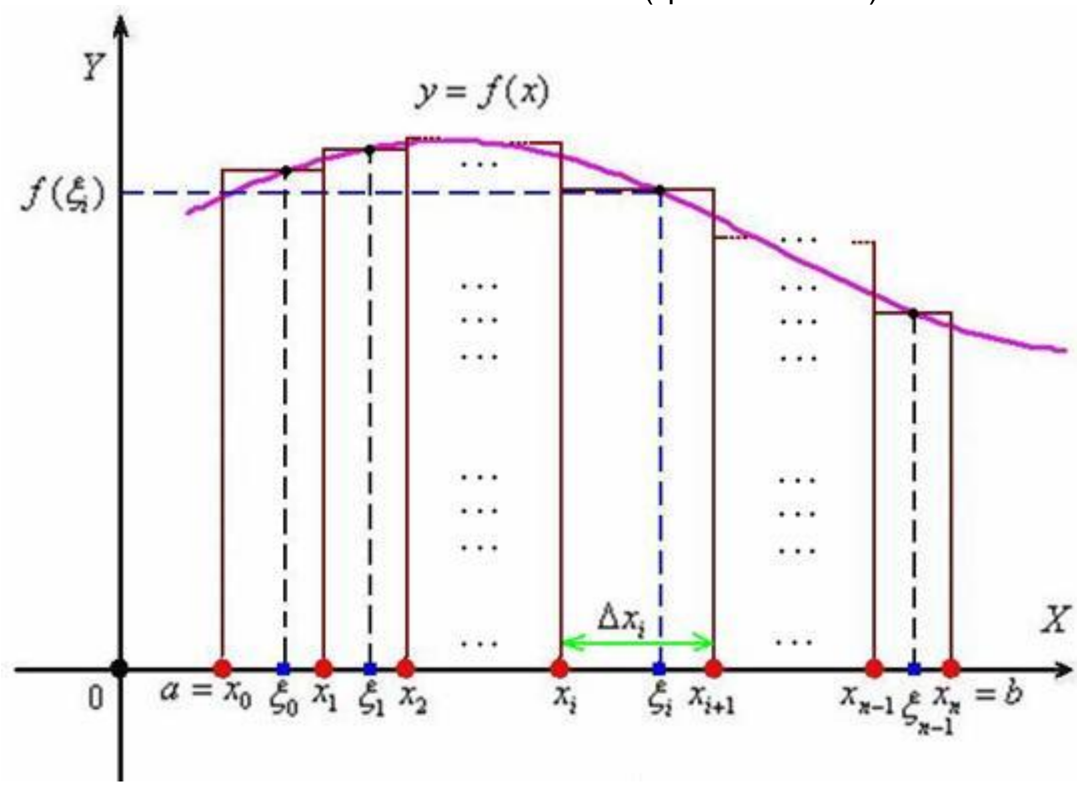
Но понятие же не из космоса прилетело!

Читаем:

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[a; b]$. Для определённости и простоты считаем, что функция положительна $(f(x) > 0)$ и **непрерывна** на данном отрезке.

Поставим задачу найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a,\ x = b$ и осью OX. Обращаю внимание на тот факт, что непрерывность функции на отрезке заведомо гарантирует существование *конечной* площади S.

Разобьём отрезок $[a; b]$ на n частей следующими точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (красные точки):



В результате получено n *частичных промежутков* $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_i; x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$ с длинами $\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_{n-1}$ соответственно. В общем случае длины *различны* – какие-то отрезки короче, какие-то длиннее. Максимальную длину называют **диаметром разбиения** и обозначают буквой «лямбда»: $\lambda = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_{n-1}\}$.

***Примечание**: последняя запись читается, как «максимальное значение из множества (набора) $\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_{n-1}$»*

В каждом из полученных промежутков опять же *произвольно* выбираем точки $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_{n-1}$ (синие квадратики).

***Примечание**: ξ («кси») – 14-я буква греческого алфавита*

Рассмотрим i-ый промежуток $[x_i; x_{i+1}]$. Его длина, очевидно, равна $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (зелёная обоюдоострая линия). Значению аргумента ξ_i соответствует значение функции $f(\xi_i)$ (синие пунктирные

линии), и произведение $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ в точности
равно **площади** соответствующего коричневого прямоугольника.

Аналогично устроен каждый отрезок. Составим сумму, которая равна площади коричневой ступенчатой фигуры:
$\sigma = f(\xi_0)\cdot\Delta x_0 + f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \ldots + f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$

Данная сумма называется **интегральной суммой**, и её часто записывают в свёрнутом виде:
$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$

***Примечание**: $\sum$ – это значок суммы, а переменная i – своеобразный «счётчик», т.е. сначала $i=0$, затем $i=1$, потом $i=2$, … и, наконец, $i=n-1$*

Что означает прилагательное *«интегральной»*? В широком смысле слова, **интегрировать – это значит, что-то объединять**. В данном случае интегральная сумма σ **объединяет** площади коричневых прямоугольников и с некоторой точностью *приближает* площадь криволинейной трапеции: $\sigma \approx S$

Теперь зададимся вопросом: **как улучшить точность приближения**? Действия очевидны – увеличиваем и увеличиваем значение n. При этом количество отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_i; x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$ **растёт**, а их длины $\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_i, \Delta x_{n-1}$ – **уменьшаются**, в том числе неизбежно уменьшается и максимальная длина λ. Количество точек $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots \xi_{n-1}$ тоже возрастает и ступенчатая фигура всё больше и больше напоминает криволинейную трапецию.

И, если количество отрезков разбиения устремить к бесконечности $n \to \infty$, то интегральная сумма (площадь ступенчатой фигуры) будет стремиться к площади криволинейной трапеции: $\sigma \to S$.

Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна пределу интегральной суммы при диаметре разбиения, стремящемся к нулю:
$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$$

Наблюдаем за удивительным превращением:

1) В рассматриваемом контексте сумму $\sum$ ещё с 17 века обозначали растянутой буквой S (Summa). Это обозначение известно как значок интеграла:

$\int$

2) Если $n \to \infty$ (и, следовательно, $\lambda \to 0$), то значения $f(\xi_i)$ стремятся «покрыть» **все** значения функции $f(x)$ из промежутка $[a; b]$, то есть:

$f(\xi_i) \to f(x)$, при этом *пределы интегрирования*: $\int_a^b$

3) И, наконец, длина любого промежуточного отрезка Δx_i становится **бесконечно малой**. Обозначение этой *бесконечно*

малой длины мы тоже хорошо знаем, оно указывает, что объединение ведётся по переменной «икс»: dx

В результате, площадь криволинейной трапеции: $S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right)=\int\limits_a^b f(x)dx$

Определение: *конечный* предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ при $\lambda\to 0$, **не зависящий** ни от способа дробления отрезка $[a;\,b]$, ни от выбора точек ξ_i, называется **определённым интегралом** функции $f(x)$ по промежутку $[a;\,b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом функция $f(x)$ называется **интегрируемой** в промежутке $[a;\,b]$. Для интегрируемости *(а, значит, существования конечной площади)*, напоминаю, *достаточно* **непрерывности** функции на отрезке $[a;\,b]$.

Если же на данном промежутке есть участки, где функция, например, **не определена** (нет её графика), то конечного предела $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$ и, соответственно, определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ не существует.

По аналогичному принципу (*дробление отрезка, выбор промежуточных точек, нахождение интегральной суммы, предел и предельный переход)* **выводятся другие тематические формулы**: **объема тела вращения**, **длины дуги кривой**, **площади поверхности вращения** и т. д.

Всё было бы хорошо, но формулу $S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right)=\int\limits_a^b f(x)dx$ очень трудно применить на практике (даже для простых функций), поэтому возникает задача отыскания более эффективного пути расчёта площади. И такой путь действительно существует – ведь из определения определённого интеграла следует, что он не зависит от способа разбиения промежутка $[a;\,b]$ и от выбора точек ξ_i.

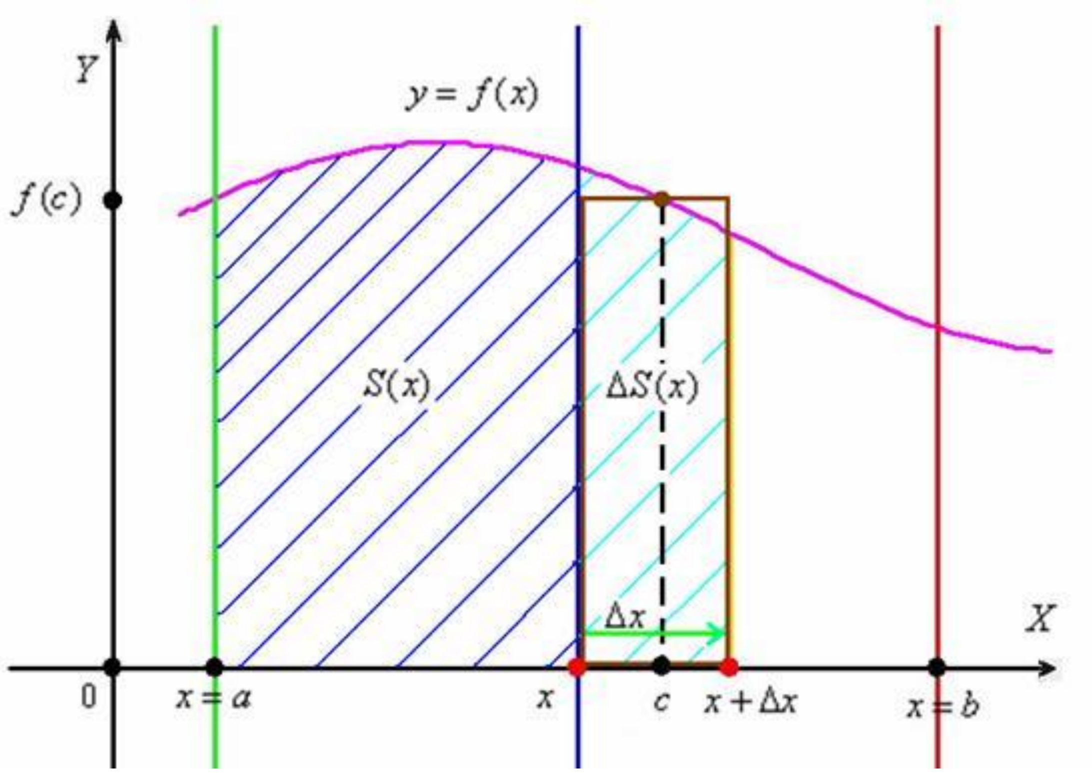
Важен лишь только нижний предел интегрирования «а»,

верхний предел интегрирования «бэ»

и сама функция «эф от икс».

Вывод формулы Ньютона-Лейбница

Рассмотрим тот же график $f(x)$ и познакомимся с функцией *переменной площади* $S(x)$. Что это за функция? Зафиксируем произвольную точку x (левая красная точка), лежащую между точками «а» и «бэ»:



В данной точке функция $S(x)$ равна площади криволинейной трапеции, которая расположена между зелёной и синей линиями и заштрихована синим цветом. Мысленно начните уменьшать значение «икс» и сдвигать синюю прямую влево – площадь $S(x)$ начнёт уменьшаться и, в конце концов, в точке $x = a$ станет равной нулю: $S(a) = 0$ (прямые совпадут). Теперь возвращаемся на исходную позицию и сдвигаем синюю линию вправо – в этом случае площадь $S(x)$ начнёт расти. И когда мы достигнем верхнего предела $x = b$ (синяя прямая «закроет» красную), площадь будет равна в точности площади всей криволинейной трапеции: $S(b) = S$.

Таким образом, аргумент может изменяться в пределах $a \le x \le b$, при этом функция $S(x)$ (площадь) будет возрастать от $S(a) = 0$ до $S(b) = S$.

Докажем, что функция переменной площади $S(x)$ является первообразной функцией для функции $f(x)$, то есть докажем, что $S'(x) = f(x)$.

Вернёмся к нашей точке «икс» и зададим в ней приращение Δx (зелёная стрелка). Для определённости полагаем,
что $\Delta x > 0$ (случай $\Delta x < 0$ доказывается аналогично). Приращение аргумента Δx влечёт приращение функции $\Delta S(x)$ – геометрически это площадь криволинейной трапеции, которая заштрихована голубым цветом.

По так называемой *теореме о среднем*, на
отрезке $[x;\, x + \Delta x]$ **существует** точка «цэ» – **такая**, что площадь коричневого прямоугольника равна площади голубой трапеции:
$f(c) \cdot \Delta x = \Delta S(x)$

***Примечание**: этот участок чертежа схематичен, поскольку мне трудно подобрать идеально точное местоположение точки «цэ»*

По **определению производной**, производная функции – это отношение приращения функции $\Delta S(x)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$:

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x}.$$

И, ввиду равенства $\Delta S(x) = f(c) \cdot \Delta x$:

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (f(c)) \overset{(*)}{=} f(x)$$

(*) Так как $\Delta x \to 0$, то точка «цэ» бесконечно близко приближается к точке «икс», и, соответственно: $f(c) \to f(x)$

Таким образом, **для любого** x из рассматриваемого промежутка справедливо равенство $S'(x) = f(x)$, означающее, что функция $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

По теореме, доказанной в самом начале урока, множество всех первообразных представимо в виде $S(x) = F(x) + C$, где $F(x)$ – какая-нибудь другая первообразная для функции $f(x)$.

Теперь в данное равенство подставляем $x = a$ и соответствующее значение площади $S(a) = 0$:

$0 = F(a) + C$, откуда следует, что $C = -F(a)$

Найденное значение константы $C = -F(a)$ подставляем в $S(x) = F(x) + C$:

$S(x) = F(x) - F(a)$

Выруливаем на финишную прямую. При $x = b$ функция $S(x)$ принимает значение, равное площади всей криволинейной трапеции: $S(b) = S$.
Подставим $x = b$ и $S(b) = S$ в уравнение $S(x) = F(x) - F(a)$:

$S = F(b) - F(a)$

Следует отметить, что в учебниках по высшей математике вывод этой формулы проводится в более солидном ключе – с помощью интеграла с переменным верхним пределом. Я же ограничился упрощенной версией доказательства, чтобы материал был понятен бОльшему количеству читателей.

Это ещё, кстати, не всё =) Завершаем мысль:

В предыдущем параграфе мы доказали, что площадь криволинейной трапеции – есть предел интегральной суммы: $S = \lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right) = \int_a^b f(x)dx$.

Но с другой стороны, $S = F(b) - F(a)$.

И из этих двух фактов следует лаконичная формула **Ньютона-Лейбница:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

,

где $F(x)$ – первообразная функция для функции $f(x)$.

Множество практических примеров на применение формулы можно найти в статьях **Определённый интеграл. Примеры решений** и **Вычисление площади с помощью определённого интеграла**, а также в последующих статьях раздела.

Рассмотрим основные свойства определённого интеграла

– Свойство, которое уже фигурировало в предыдущем пункте: интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Графическая интерпретация очевидна: криволинейная трапеция *вырождается* в отрезок, а площадь отрезка с геометрической точки зрения равна нулю.

– Свойства линейности:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

– Если у интеграла поменять местами пределы интегрирования, то он сменит знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Почему? Пусть для определённости $a < b$. Тогда при перестановке пределов интегрирования разбиение отрезка $[a;\ b]$ будет проводиться *справа налево* (вспоминаем ступенчатую фигуру 1-го чертёжа), и длины частичных промежутков формально станут отрицательными $\Delta x_i < 0$, поэтому интегральная сумма $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ и сам интеграл (как предел суммы) сменит знак.

Следует заметить, что на практике намного чаще пользуются вторым случаем – когда изначально $a > b$, например:

$$\int_3^2 (x-7)dx = -\int_2^3 (x-7)dx = \int_2^3 (7-x)dx$$

Цель этих действий – расставить пределы интегрирования в привычном порядке, хотя исходный интеграл $\int_3^2 (x-7)dx$ и так рассчитывается без всяких проблем. Однако не редкость, когда перестановка пределов интегрирования не только удобна, но и рациональна.

– Какими бы ни были точки a, b, c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Здесь в первую очередь, конечно же, напрашивается ситуация, когда точка «цэ» лежит внутри отрезка $[a;\, b]$. Просто и естественно – криволинейную трапецию можно разделить на две части, т.е. изначальная площадь будет равна сумме площадей.

Но данное свойство работает и в «нестандартном» случае, когда точка «цэ» лежит вне промежутка $[a;\, b]$. Желающие могут проанализировать это самостоятельно.

– **Пожалуйста, запомните!** Если подынтегральная функция $f(x) \ge 0$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ *(здесь и далее полагаем, что $a < b$)*. И, наоборот, если $f(x) \le 0$, то интеграл будет неположительным: $\int_a^b f(x)dx \le 0$.

Свойство элементарно доказывается: снова вспоминаем, что $\lim\limits_{\lambda \to 0}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right) = \int_a^b f(x)dx$. Длины частичных промежутков положительны: $\Delta x_i > 0$, но в первом случае значения функции $f(\xi_i) \ge 0$ (криволинейная трапеция лежит не ниже оси абсцисс), а во втором случае $f(\xi_i) \le 0$ (криволинейная трапеция лежит не выше оси абсцисс)

Таким образом, если при вычислении интеграла $\int_{-5}^{-1} x^2 dx$ у вас получилось отрицательное значение – ***ищите ошибку***. Функция $f(x) = x^2 > 0$ на промежутке интегрирования $[-5;\, -1]$ *(и, к слову, вообще на любом ненулевом промежутке)*, поэтому интеграл $\int_{-5}^{-1} x^2 dx$ обязательно должен получиться положительным.

Наоборот – если интеграл $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$ получился положительным, то здесь тоже где-то допущена ошибка, поскольку $\sin x \le 0$ на отрезке $[\pi,\, 2\pi]$.

! Совет: перед решением любого определённого интеграла всегда полезно проанализировать знак подынтегральной функции!

– **Ещё одно важное свойство**. Если функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a;\, b]$, и для всех «икс» из данного промежутка справедливо неравенство $g(x) \le f(x)$, то

$$\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$$

Тоже всё наглядно – график функции $f(x)$ расположен *не ниже* графика функции $g(x)$, поэтому площадь $\int_a^b f(x)dx$ будет *не меньше*, а на практике почти всегда – **больше** площади $\int_a^b g(x)dx$.

Из данного свойства следует **важнейшая рабочая формула** вычисления площади фигуры, ограниченной графиками функций $f(x), g(x) \quad (g(x) \le f(x))$ и прямыми $x = a,\ x = b$:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

– Если $m \le f(x) \le M$ на $[a;\, b]$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Рассмотрим конкретную задачу, поясняющую геометрический смысл данного свойства, а то я чувствую, вы уже изнываете без практики =)

<u>Пример 1</u>

Оценить определенный интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{e^x}{x}dx$

Решение: подынтегральная функция $f(x) = \frac{e^x}{x}$ **непрерывна** на отрезке $[a;\, b] = \left[\frac{1}{2};\, 2\right]$, а значит, достигает на нём m и M – **наименьшего и наибольшего значений**. Решаем стандартную двухшаговую задачу по нахождению $m = \min\limits_{[a;\,b]} f(x),\quad M = \max\limits_{[a;\,b]} f(x),$:

1) Вычислим значения функции в **критических точках**, принадлежащих отрезку:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$$

$x = 1 \in \left[\frac{1}{2};\, 2\right]$ – критическая точка.

$$f(1) = \frac{e^1}{1} = e \approx 2{,}72$$

2) Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e} \approx 3{,}30; \qquad f(2) = \frac{e^2}{2} \approx 3{,}69$$

Таким образом: $m = \min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} \frac{e^x}{x} = f(1) = e,\quad M = \max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} \frac{e^x}{x} = f(2) = \frac{e^2}{2}$

Длина отрезка интегрирования: $b-a=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

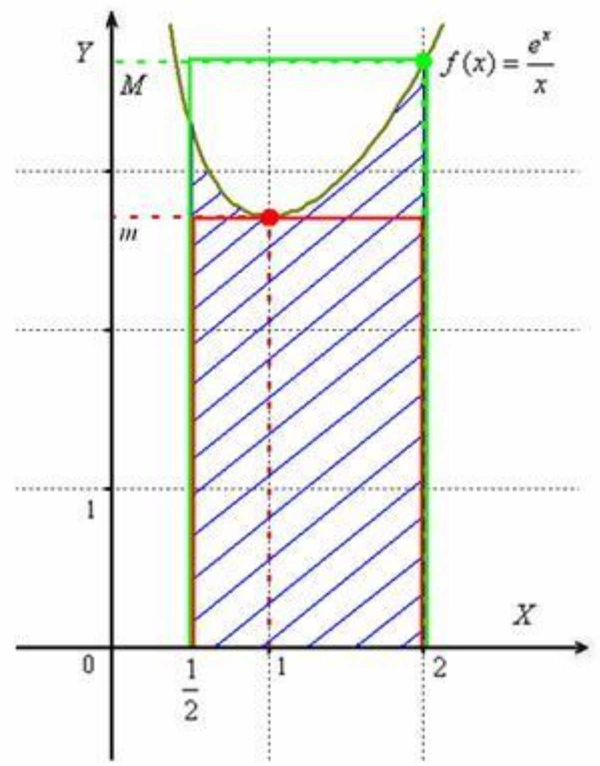
В результате, оценка определённого интеграла:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$e\cdot\frac{3}{2}\le\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{e^x}{x}dx\le\frac{e^2}{2}\cdot\frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3e}{2}\le\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{e^x}{x}dx\le\frac{3e^2}{4}$

Геометрически это означает, что площадь $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{e^x}{x}dx$ криволинейной трапеции (синяя штриховка) **не меньше** площади красного прямоугольника $m(b-a)=\frac{3e}{2}\approx 4{,}08\ ed^2$. и **не больше** площади зелёного прямоугольника $M(b-a)=\frac{3e^2}{4}\approx 5{,}54\ ed^2$.:



Да, оценка, конечно, очень грубая, но таково задание и оно иногда встречается в контрольных работах. Кстати, интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{e^x}{x}dx$ является *неберущимся*, и вычислить заштрихованную площадь можно лишь с определённой точностью, например, **методом трапеций**, **по формуле Симпсона**, **с помощью разложения функции в ряд**, др. способами.

– И в заключение параграфа – **теорема о среднем**: если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\,b]$, то существует точка $c\in[a;\,b]$ – такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$. Геометрический смысл теоремы я уже использовал при выводе формулы Ньютона-Лейбница, единственное, там речь шла о кусочке криволинейной трапеции, здесь же – о всей фигуре. Грубо говоря, всегда существует прямоугольник со стороной $(b-a)$ (длина отрезка интегрирования), площадь которого равна площади $\int_a^b f(x)dx$.

Доказательство опустим, поскольку в нём фигурируют другие теоремы математического анализа.

Общая концепция задачи интегрирования

В предыдущих пунктах мы разобрали задачу нахождения площади, но это частная и довольно малая область применения интегрального исчисления. Существует великое множество задач интегрирования, при этом наибольшим разнообразием отличается даже не математика, а физика. Вернёмся к самому смыслу термина: **интегрирование – это объединение**. А объединить, как вы понимаете, можно много чего =) И **в общем виде** задача интегрирования ставится следующим образом, не судите строго, формулирую своими словами:

Требуется найти значение величины W на отрезке $[\alpha;\beta]$. Величина W – это не обязательно площадь, объём либо какое-то другое геометрическое понятие. Это может быть что-нибудь с ярко выраженным физическим смыслом, например, *работа силы*. При этом известна *производная величина,* заданная функцией $w(\tau)$ на том же промежутке $[\alpha;\beta]$. Рассматриваемый отрезок и аргумент «тау» – тоже не обязательно геометрия, речь может идти, скажем, о временнОм промежутке и времени.

В предположении о непрерывности функции $w(\tau)$ на $[\alpha;\beta]$, задача решается в два этапа:

Сначала рассматривается *бесконечно малый* отрезок $d\tau$ промежутка $[\alpha;\beta]$, на котором произведение $w(\tau)\cdot d\tau$ равно *бесконечно малому «кусочку»* dW от разыскиваемого значения W. То есть, справедливо равенство $w(\tau)\cdot d\tau = dW$.

Далее проводится объединение (интегрирование) всех *бесконечно малых элементов* $w(\tau)\cdot d\tau$ по отрезку $[\alpha;\beta]$, в результате чего и получается суммарное значение искомой величины: $\int_\alpha^\beta w(\tau)d\tau = \int_\alpha^\beta dW = W$.

Примечание*: в теории и практике вышеизложенные равенства почти всегда записывают в обратном порядке:* $dW = w(\tau)d\tau,\quad W = \int_\alpha^\beta w(\tau)d\tau$*. Стандарты нарушены только для лучшего понимания материала.*

Давайте вспомним 1-й чертёж урока, где мы установили, что площадь S криволинейной трапеции равна определённому интегралу $\int_a^b f(x)dx$. Ведь что такое произведение $f(x)dx$? Данное произведение выражает площадь прямоугольника с высотой $f(x)$ и *бесконечно малой* длиной dx. Иными словами, это *элементарный «кирпичик» площади*: $f(x)dx = dS$.

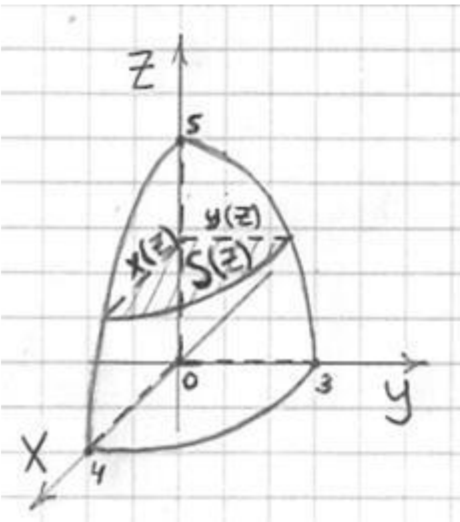
Объединяя (интегрируя) эти *бесконечно малые прямоугольники* по отрезку $[a;b]$, мы и получаем площадь всей криволинейной трапеции: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dS = S$.

Заключительные примеры позволят вам ещё лучше понять сущность интегрирования:

Пример 2

Вычислить объём эллипсоида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$

Решение: перепишем уравнение **эллипсоида** в каноническом виде $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$ и выполним чертёж. Ввиду симметрии тела достаточно вычислить объём в 1-м октанте:



Прежде всего, обратим внимание на заштрихованную «площадку» $S(z)$ – она представляет собой «четвертинку» **эллипса** с большой полуосью $x(z)$ и малой полуосью $y(z)$, длины которых зависят от значения «зет». Сама площадь $S(z)$, разумеется, тоже величина переменная: мысленно положите сверху ладошку и начните опускать лифт вниз. Длины $x(z), y(z)$, а вместе с ними и площадь $S(z)$ – начнут возрастать. Максимальные значения будет достигнуты в плоскости $XOY\ (z=0)$: $x(0)=4, y(0)=3$. В Примере №2 урока о **площади и объеме при параметрически заданной линии** выведена формула площади эллипса $S = \pi ab$ ед^2. У нас же одна четверть эллипса, поэтому площадь «на нулевом этаже» будет составлять $S(0) = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot x(0) \cdot y(0) = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4 \cdot 3$ ед^2. $= 3\pi$ ед^2.

Теперь поднимаем заштрихованную «площадку» ладошкой вверх – полуоси $x(z), y(z)$ и площадь $S(z)$ будут уменьшаться – до тех пор, пока при $z=5$ не *выродятся* в точку; площадь здесь станет нулевой: $S(5)=0$.

В чём состоит трудность нахождения объёма V данного тела? Трудность состоит в том, что стОит нам чуть-чуть «дёрнуться» и площадь эллипса изменится. Что делать? Использовать общий принцип интегрирования:

На первом шаге рассматриваем «площадку» $S(z)$ *бесконечно малой толщины* dz. При этом произведение **площади** $S(z)$ **на высоту** dz будет равно *элементарному, бесконечно малому элементу* объема тела: $S(z)\cdot dz = dV$.

На втором шаге «плавно поднимаемся на лифте с 0-го на 5-й этаж», **объединяя** ВСЕ элементарные слои dV объёма: $\int_0^5 S(z)dz = \int_0^5 dV = V$ – получая тем самым итоговый объём тела.

Суть разобрана, остальное – дело техники:

1) Найдём функцию $x(z)$ длины **большой полуоси эллипса**. Для этого в уравнении эллипсоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$ обнуляем «игрековую» координату:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{16}=1-\frac{z^2}{25} \quad \Rightarrow x^2=\frac{16}{25}(25-z^2)$$

Поскольку дело происходит в 1-м октанте, то перед корнем будет знак «плюс»:

$$x(z)=\frac{4}{5}\sqrt{25-z^2}$$

2) Аналогично находим функцию длины **малой полуоси**. В уравнении эллипсоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$ обнуляем «иксовую» координату и выражаем $y(z)$:

$$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1 \quad \Rightarrow \frac{y^2}{9}=1-\frac{z^2}{25} \quad \Rightarrow y^2=\frac{9}{25}(25-z^2) \quad \Rightarrow y(z)=\frac{3}{5}\sqrt{25-z^2}$$

3) Составим функцию площади $S(z)$, не забывая, что это «четвертинка» эллипса:

$$S(z)=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot x(z)\cdot y(z)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{5}\sqrt{25-z^2}\cdot\frac{3}{5}\sqrt{25-z^2}=\frac{3\pi}{25}(25-z^2)$$

И, наконец, «запускаем лифт», объединяя элементарные частички объёма $S(z)dz$:

$$V=\int_0^5 S(z)dz=\frac{3\pi}{25}\int_0^5(25-z^2)dz=\frac{3\pi}{25}\left(25z-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^5=$$

$$=\frac{3\pi}{25}\cdot\left(125-\frac{125}{3}-(0-0)\right)=\frac{3\pi}{25}\cdot\frac{250}{3}=10\pi\text{ ед}^3.$$

Так как рассматривалась только $\frac{1}{8}$ часть эллипсоида, результат умножаем на 8.

Ответ: $V=80\pi\text{ ед}^3.\approx 251{,}33\text{ ед}^3.$

Если решить задачу с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (в общем виде), то получится формула объема **эллипсоида**: $V=\frac{4}{3}\pi abc\ ед^3$.

Следует отметить, что в общем случае эллипсоид не является *телом вращения*, поэтому к нему не применим «обычный» метод нахождения объема, изложенный в статье **Объем тела вращения**. Таким образом, разобранная задача оказывается не только поучительной, но ещё и крайне полезной. Желающие **могут найти** *(Раздел IV Интегралы, Задача 20)* ещё порядка 30 похожих примеров и потренироваться.

Для полноценной картины как нельзя кстати будет физика:

Пример 3

Найти путь, пройдённый телом в промежуток времени от $t_1=2\ c$ до $t_2=5\ c$, если известен закон изменения его скорости $v(t)=t^2+2$ (м/с)

Решение: обозначим через X расстояние, пройдённое телом за 5 – 2 = 3 секунды – начиная с момента времени $t_1=2\ c$ и заканчивая моментом $t_2=5\ c$.

Немного проанализируем задачу. Вот если бы тело двигалось с постоянной скоростью, например, 7 м/с, то никаких проблем – оно бы за 3 секунды прошло путь в $7\cdot 3=21$ метр. Но у нас движение даже не равноускоренное (при котором ещё можно извернуться без матана) – у нас закон изменения скорости *нелинейный*. При этом в начальный момент времени скорость равна $v(2)=2^2+2=6$ м/с, а в конечный момент: $v(5)=5^2+2=27$ м/с. Но от этой информации легче не стало – какое расстояние X успело пройти тело за эти три секунды?! Задание осложняется ещё и тем, что скорость существенно возрастает даже за малые промежутки времени, поэтому у нас нет и близкой оценки пройдённого пути.

Как быть? На помощь приходит интегрирование. Рассмотрим *бесконечно малый* промежуток времени dt, на котором скорость тела можно считать постоянной (или, как говорят физики, *мгновенной*). Тогда произведение данной скорости на промежуток времени dt равно *элементарному бесконечно малому* «кусочку» пройдённого пути: $v(t)\cdot dt=dX$ *(скорость умножить на время – это же расстояние, верно?)*.

Всё что осталось сделать – это объединить микроскопические «шажочки» dX на временнОм промежутке $[2;5]$:

$$X=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt=\int_2^5(t^2+2)dt=\left(\frac{t^3}{3}+2t\right)\Big|_2^5=\frac{125}{3}+10-\left(\frac{8}{3}+4\right)=\frac{125}{3}+10-\frac{8}{3}-4=39+6=45$$

Ответ: 45 метров