

# Дифференциальное уравнение

---

Добрый день,

## История

---

Первоначально дифференциальные уравнения возникли из задач [механики](#), в которых требовалось определить координаты [тел](#), их [скорости](#) и [ускорения](#), рассматриваемые как функции [времени](#) при различных воздействиях. К дифференциальным уравнениям приводили также некоторые рассмотренные в то время геометрические задачи.

Основой теории дифференциальных уравнений стало дифференциальное исчисление, созданное [Лейбницем](#) и [Ньютоном](#) (1642—1727). Сам термин «дифференциальное уравнение» был предложен в 1676 году Лейбницем.

Из огромного числа работ [XVIII века](#) по дифференциальным уравнениям выделяются работы [Эйлера](#) (1707—1783) и [Лагранжа](#) (1736—1813). В этих работах была прежде развита теория малых колебаний, а следовательно — теория линейных систем дифференциальных уравнений; попутно возникли основные понятия линейной алгебры (собственные числа и векторы в  $n$ -мерном случае). Вслед за Ньютоном [Лаплас](#) и Лагранж, а позже [Гаусс](#) (1777—1855) развивают также методы теории возмущений.

Когда была доказана неразрешимость алгебраических уравнений в радикалах, [Жозеф Лиувиль](#) (1809—1882) построил аналогичную теорию для дифференциальных уравнений, установив невозможность решения ряда уравнений (в частности таких классических, как линейные уравнения второго порядка) в элементарных функциях и квадратурах. Позже [Софус Ли](#) (1842—1899), анализируя вопрос об интегрировании уравнений в квадратурах, пришёл к необходимости подробно исследовать группы диффеоморфизмов (получившие впоследствии имя [групп Ли](#)) — так по теории дифференциальных уравнений возникла одна из самых плодотворных областей современной математики, дальнейшее развитие которой было тесно связано совсем с другими вопросами (алгебры Ли ещё раньше рассматривали [Симеон-Дени Пуассон](#) (1781—1840) и, особенно, [Карл Густав Якоб Якоби](#) (1804—1851)).

Новый этап развития теории дифференциальных уравнений начинается с работ [Анри Пуанкаре](#) (1854—1912), созданная им «качественная теория дифференциальных уравнений» вместе с теорией функций комплексных переменных легла в основу современной [топологии](#). Качественная теория дифференциальных уравнений, или, как теперь её чаще называют, [теория динамических систем](#), сейчас активно развивается и имеет важные применения в естествознании.

Развитие теории дифференциальных уравнений позволило в ряде случаев отказаться от требования непрерывности исследуемых функций и ввести [обобщённые решения](#) дифференциальных уравнений.

Фото:

[https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5\\_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5)

Дифференциал — линейная часть приращения функции.

**Дифференциальное уравнение** — [уравнение](#), в которое входят [производные функции](#) и могут входить сама функция, независимая переменная и параметры.

**Порядок** входящих в уравнение производных может быть различен (формально он ничем не ограничен).

Производные, функции, независимые переменные и параметры могут входить в уравнение в различных комбинациях или могут отсутствовать вовсе, кроме хотя бы одной производной.

Не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным уравнением.

**В отличие от алгебраических уравнений, в результате решения, которых ищется число (несколько чисел), при решении дифференциальных уравнений ищется функция (семейство функций).**

Все дифференциальные уравнения можно разделить на:

1. обыкновенные (ОДУ), в которые входят только функции (и их производные) от одного аргумента, и
2. уравнения с частными производными (УРЧП), в которых входящие функции зависят от многих переменных.
3. Существуют также стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), включающие случайные процессы.

В зависимости от комбинаций производных, функций, независимых переменных дифференциальные уравнения подразделяются на:

1. **линейные и нелинейные,**
2. **с постоянными или переменными коэффициентами,**
3. **однородные или неоднородные.**

В связи с важностью приложений **в отдельный класс выделены**

4. **квазилинейные** (линейные относительно старших производных) дифференциальные уравнения в частных производных<sup>1</sup>.

Важнейшим вопросом для дифференциальных уравнений является существование и единственность их решения.

Разрешение этого вопроса дают теоремы существования и единственности, указывающие необходимые и достаточные для этого условия.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений такие условия были сформулированы **Липшицем** (1864).

Для уравнений в частных производных соответствующая теорема была доказана **С. В. Ковалевской** (1874).

### **Обыкновенное дифференциальное уравнение**

[https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5\\_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5)

**Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)** — это уравнения, зависящие от одной независимой переменной; они имеют вид или

где — неизвестная **функция** (возможно, **вектор-функция**; в таком случае часто говорят о системе дифференциальных уравнений), зависящая от независимой переменной  $x$  штрих означает дифференцирование по  $x$ . Число называется **порядком** дифференциального уравнения. Наиболее практически важными являются дифференциальные уравнения первого и второго порядка.

### **Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка**

**Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка** — класс дифференциальных уравнений первого порядка, наиболее легко поддающихся решению и исследованию. К нему относятся уравнения в полных [дифференциалах](#), уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения первого порядка и линейные уравнения первого порядка. Все эти уравнения можно проинтегрировать в конечном виде.

Отправной точкой изложения будет служить дифференциальное уравнение первого порядка, записанное в т. н. симметричной форме:

где функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  определены и непрерывны в некоторой области.

## Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения

### Линейное дифференциальное уравнение

Как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных можно разделить на **линейные** и **нелинейные**.

Дифференциальное уравнение является линейным, если неизвестная функция и её производные входят в уравнение только в первой степени (и не перемножаются друг с другом). Для таких уравнений решения образуют [аффинное подпространство](#) пространства функций.

Теория линейных ДУ развита значительно глубже, чем теория нелинейных уравнений. Общий вид линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка:

где  $p_i(x)$  — известные функции независимой переменной, называемые коэффициентами уравнения. Функция  $r(x)$  в правой части называется *свободным членом* (единственное слагаемое, не зависящее от неизвестной функции). Важным частным классом линейных уравнений являются линейные дифференциальные уравнения с *постоянными коэффициентами*.

Подклассом линейных уравнений являются

**однородные дифференциальные уравнения** — уравнения, которые не содержат свободного члена:  $r(x) = 0$ . Для однородных дифференциальных уравнений выполняется [принцип суперпозиции](#): линейная комбинация частных решений такого уравнения также будет его решением.

Все остальные линейные дифференциальные уравнения называются **неоднородными дифференциальными уравнениями**.

**Нелинейные дифференциальные уравнения в общем случае не имеют разработанных методов решения, кроме некоторых частных классов. В некоторых случаях (с применением тех или иных приближений) они могут быть сведены к линейным**

**Дифференциальное уравнение порядка выше первого** можно преобразовать в **систему уравнений первого порядка**, в которой **число уравнений равно порядку исходного дифференциального уравнения**.

Современные быстродействующие ЭВМ эффективно дают численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений, не требуя получения его решения в аналитическом виде. Это позволило некоторым исследователям утверждать, что решение задачи получено, если её удалось свести к решению [обыкновенного дифференциального уравнения](#).

Обобщением понятия дифференциального уравнения на случай бесконечного множества переменных является [уравнение в функциональных производных](#).

[https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5\\_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5)

**Порядок дифференциального уравнения** — наивысший **порядок производных**, входящих в него интегралов.

Если дифференциальное уравнение является многочленом относительно старшей производной, то степень этого многочлена называется **степенью дифференциального**

**уравнения**. Так, например, уравнение является уравнением второго порядка, четвёртой степени<sup>[2]</sup>.

**Решением (интегралом) дифференциального**

**уравнения** порядка  $n$  называется **функция**  $y(x)$ , имеющая на некотором

интервале  $(a, b)$  производные до порядка  $n$  включительно и удовлетворяющая этому уравнению. **Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием.**

Задача об интегрировании дифференциального уравнения считается решённой, если

нахождение неизвестной функции удастся привести к **квадратуре**, (т. е. к виду ,

где — элементарная функция) независимо от того, выражается ли полученный интеграл в конечном виде через известные функции или нет.

Все дифференциальные уравнения можно разделить на:

- **обыкновенные (ОДУ)**, в которые входят только функции (и их производные) от одного аргумента, и

- **уравнения с частными производными (УРЧП)**, в которых входящие функции зависят от многих переменных.

- Существуют также **стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)**, включающие **случайные процессы**.

Решения дифференциальных уравнений подразделяются на:

1. общие и
2. частные решения.

Общие решения включают в себя неопределённые постоянные,

а для уравнений в частных производных — произвольные функции от независимых переменных, которые могут быть уточнены из дополнительных условий интегрирования (начальных условий для обыкновенных дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий для уравнений в частных производных). **После определения вида, указанных постоянных и неопределённых функций решения становятся частными.**

Поиск решений обыкновенных дифференциальных уравнений привёл к установлению класса **специальных функций** — часто встречающихся в приложениях функций, не выражающихся через известные элементарные функции. Их свойства были подробно изучены, составлены таблицы значений, определены взаимные связи и т. д.

