

Понятие первообразной

Можно посмотреть видео урок: https://youtu.be/ECIGyp_v0wU

Рассмотрим движение материальной точки вдоль прямой. Закон движения точки задан функцией $s(t)$. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ равна производной функции $s(t)$. $v(t) = s'(t)$.

В практике встречается обратная задача: по заданной скорости движения точки $v(t)$ найти закон движения, т.е. найти такую функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$. Функцию $s(t)$, такую, что $s'(t) = v(t)$, называют первообразной функции $v(t)$.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например. 1) $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$.

2) $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной функции $f(x) = x^3$, так как $(\frac{x^4}{4})' = x^3$.

Рассмотрим $f(x) = x^2$. Найдем производные следующих квадратичных функций:

$(x^2)' = 2x$, $(x^2 + 3)' = 2x$, $(x^2 - 5)' = 2x$ – функции отличались между собой только постоянной, а производную имеют одну и ту же. Отсюда следует, что любая функция имеет множество первообразных $F(x) + C$ (C – const). $2x$ – функция $f(x)$, а x^2 , $x^2 + 3$, $x^2 - 5$ – ее первообразные $F(x)$.

Таблица первообразных

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
ℓ^x	$\ell^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Операцию нахождения производной для заданной функции называют **дифференцированием**. Обратную операцию нахождения первообразной для данной функции называют **интегрированием**.

ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
----------------	----------------------

1. $f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$
2. $c f(x)$	$c F(x)$
3. $f(kx + b)$	$\frac{1}{k} F(kx + b)$

Обозначения: $f(x)$ – функция
 $f'(x)$ – производная функции
 $F(x)$ – первообразная функции

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ

$$1. f(x) = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot x^0$$

$$F(x) = \frac{2x^{0+1}}{0+1} = \frac{2x}{2} = x + C;$$

$$2. f(x) = 3x = 3x^1$$

$$F(x) = \frac{3x^{1+1}}{1+1} = \frac{3x^2}{2} + C;$$

$$3. f(x) = x^3 + 6$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 6x + C;$$

$$4. f(x) = e^x + \frac{1}{x} + x$$

$$F(x) = e^x + \ln x + \frac{x^2}{2} + C;$$

$$5. f(x) = 4x^2 - 5\sin x$$

$$F(x) = \frac{4x^3}{3} + 5\cos x + C;$$

$$6. f(x) = e^{4x} - \cos(2x + 3)$$

$$F(x) = \frac{1}{4} e^{4x} - \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C.$$

Задания.

Найти первообразные следующих функций $F(x)$:

$$1. f(x) = x^5 - 7$$

$$2. f(x) = x^{-3} + x - 3$$

$$3. f(x) = 3x^2 - 4x$$

$$4. f(x) = 4x + 10$$

$$5. f(x) = \frac{1}{x-5} - 2\cos(x + 3)$$

$$6. f(x) = \frac{6}{x} + \sin 4x$$

$$7. f(x) = 2e^{x+4} - 3\sin(x - 7)$$

$$8. f(x) = e^{2x-1} + \frac{1}{5x}$$

$$9. f(x) = 6x^5 + \sin(3x - 2) - 5$$

$$10. f(x) = 4 \cos(6x - 1) + \frac{7}{2x+6}$$

$$11. f(x) = 8x^3 - 7x + 6\ell^{3x-5} - 5 \sin(4x + 1)$$